

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

DE INVLOED VAN STATIONAIRE WINDVELDEN OP EEN ZEE

VAN OP DELEN CONSTATE DIEPTE.

G.W. Veltkamp.

Rapport TW 24.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Februari

1954.

De invloed van stationaire windvelden op een zee van op delen constante diepte.

1. Inleiding en overzicht.

Dit rapport ¹⁾ is een vervolg op het rapport TW 23, [1], waarin de invloed van stationaire windvelden op een zee van overal constante diepte besproken werd. Thans nemen we aan dat de zee bestaat uit meerdere delen, die ieder een constante diepte hebben, deze diepten zullen echter in het algemeen verschillend zijn.

De zeebodem bestaat dus uit een aantal horizontale vlakken, met elkaar verbonden door verticale discontinuïteitsvlakken, die zich op een horizontaal vlak als discontinuïteitskrommen projecteren. Dit geval moet natuurlijk beschouwd worden als een idealisering van een geval, waarbij twee zeeën van elk ten naasten bij constante diepte door een gebied met sterke helling met elkaar verbonden zijn en dient vooral als voorstudie voor het in werkelijkheid belangrijker geval van een zee met veranderlijke diepte.

Evenals in TW 23 baseren we ons weer op de door Schalkwijk [2] gegeven differentiaalvergelijkingen. De in TW 23 ingevoerde begrippen als windpotentialen, stroomfunctie en complexe potentiaal voeren we ook hier in, waarna blijkt dat de oplossing van de gestelde vraagstukken geheel bepaald is door de complexe potentiaal $\Omega(z)$. Deze is in de verschillende deelgebieden weer een analytische functie, waarvoor nu rand- en overgangsvoorwaarden gegeven zijn. De eerste gelden langs de rand (kust) van de zee, de laatste langs de grenslijnen tussen deelgebieden met verschillende diepte. Het blijkt dat deze rand- en overgangsvoorwaarden voldoende zijn om de opwaaiing en de stromingssnelheid bij een gegeven windveld eenduidig vast te leggen. (2).

Het geval dat de zee uit meer dan twee delen met verschillende diepten bestaat, blijft daarna verder onbesproken, doch in het geval van twee deelgebieden met verschillende diepten, wordt een oplossingsmethode aangegeven, die neerkomt op de opstelling van een integraal-vergelijking die tot een in de literatuur bekend type behoort (3). Voor het geval dat de diepte in het ene deel zeer veel groter is dan in het andere deel, geven we in 4. ook een iteratiemethode aan, waarbij het probleem van de simultane bepaling van twee in verschillende gebieden gedefinieerde analytische functies, waarvoor rand- en overgangsvoorwaarden gegeven zijn, gereduceerd wordt tot een aantal afzonderlijke problemen, waarbij steeds slechts

1) Dit onderzoek werd verricht onder leiding van Prof.Dr D. van Dantzig.

één analytische functie met behulp van uitsluitend randvoorwaarden bepaald behoeft te worden. Het blijkt dat een eerste benadering voor de stroming in het ondiepe gedeelte gevonden kan worden, indien we langs de scheidingslijn van diep en ondiep gebied als randvoorwaarde voor de stroming in het ondiepe gebied eisen dat de verhoging van de zeespiegel boven het normale niveau nul is. Deze voorwaarde, die fysisch zeer plausibel is voert tot een enigszins ongewone randvoorwaarde voor de complexe potentiaal. In 5. wordt de oplossing van dit type rand-problemen besproken.

Als praktische toepassing beschouwen we in 6. de voorstelling van de Noordzee als rechthoekige baai van een oceaan die een halfvlak beslaat. In tegenstelling tot de behandeling die in TW 23 van dit geval gegeven is, nemen we nu aan dat de diepte van de oceaan zeer veel groter is dan die van de zee. Met enige benaderingen wordt het windeffect aan de landzijde van de baai berekend. De uitkomst blijkt redelijk goed overeen te stemmen met Schalkwijks resultaat voor het geval van een gelijkmatig hellende bodem.

Het is duidelijk dat de conceptie van deelgebieden met constante diepte slechts een benadering kan geven van de realiteit. Daar echter op deze wijze langs streng analytische weg een inzicht in verschillende verschijnselen, die bij niet constante diepte optreden, verkregen kan worden, is o.i. het gebruik van dit beeld gerechtvaardigd.

2. Overgangsvoorwaarden en eenduidigheid.

We zullen in deze paragraaf veronderstellen, dat de zee een gebied ²⁾ G van het x,y -vlak beslaat dat begrensd en hetzij enkelvoudig samenhangend, hetzij meervoudig samenhangend op de in TW 23, pag. 11 beschreven wijze (eindig veel "eilanden") is.

We nemen nu aan dat G uiteenvalt in eindig veel deelgebieden $G_1, G_2, \dots, G_n$, in elk waarvan de diepte van de zee (in ongestoorde toestand) constant is en de waarde H_1 , resp. $H_2, \dots$ resp. H_n heeft.

Zij Γ de rand van G , $\Gamma^{(j)}$ die van G_j ($j = 1, \dots, n$). Samenvallende delen van Γ en $\Gamma^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$) duiden we aan met Γ_j , samenvallende delen van $\Gamma^{(j)}$ en $\Gamma^{(k)}$ ($j, k = 1, \dots, n$) noemen we $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$ (zie fig.2.1).

- 2) Evenals in TW 23 zullen we onder een gebied verstaan een open samenhangende puntverzameling, waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal continu differentieerbare krommen.

Natuurlijk behoeven Γ_j , resp. Γ_{jk} niet voor alle j en k te bestaan, bij sommaties e.d. zullen we stilzwijgend veronderstellen dat de sommatie alleen wordt uitgestrekt over die termen die werkelijk bestaan.

Als positieve richting langs Γ resp. $\Gamma^{(j)}$ kiezen we de bij G , resp. G_j behorende

positieve omloopszin (zodanig dat G , resp. G_j links ligt).

Ieder deel van $\Gamma^{(j)}$ is of ook een deel van Γ of ook een deel van een zekere $\Gamma^{(k)}$. De positieve richtingen langs samenvallende delen van Γ en $\Gamma^{(j)}$ zijn dezelfde, die langs samenvallende delen van $\Gamma^{(j)}$ en $\Gamma^{(k)}$ zijn tegengesteld (vgl. fig. 2.1).

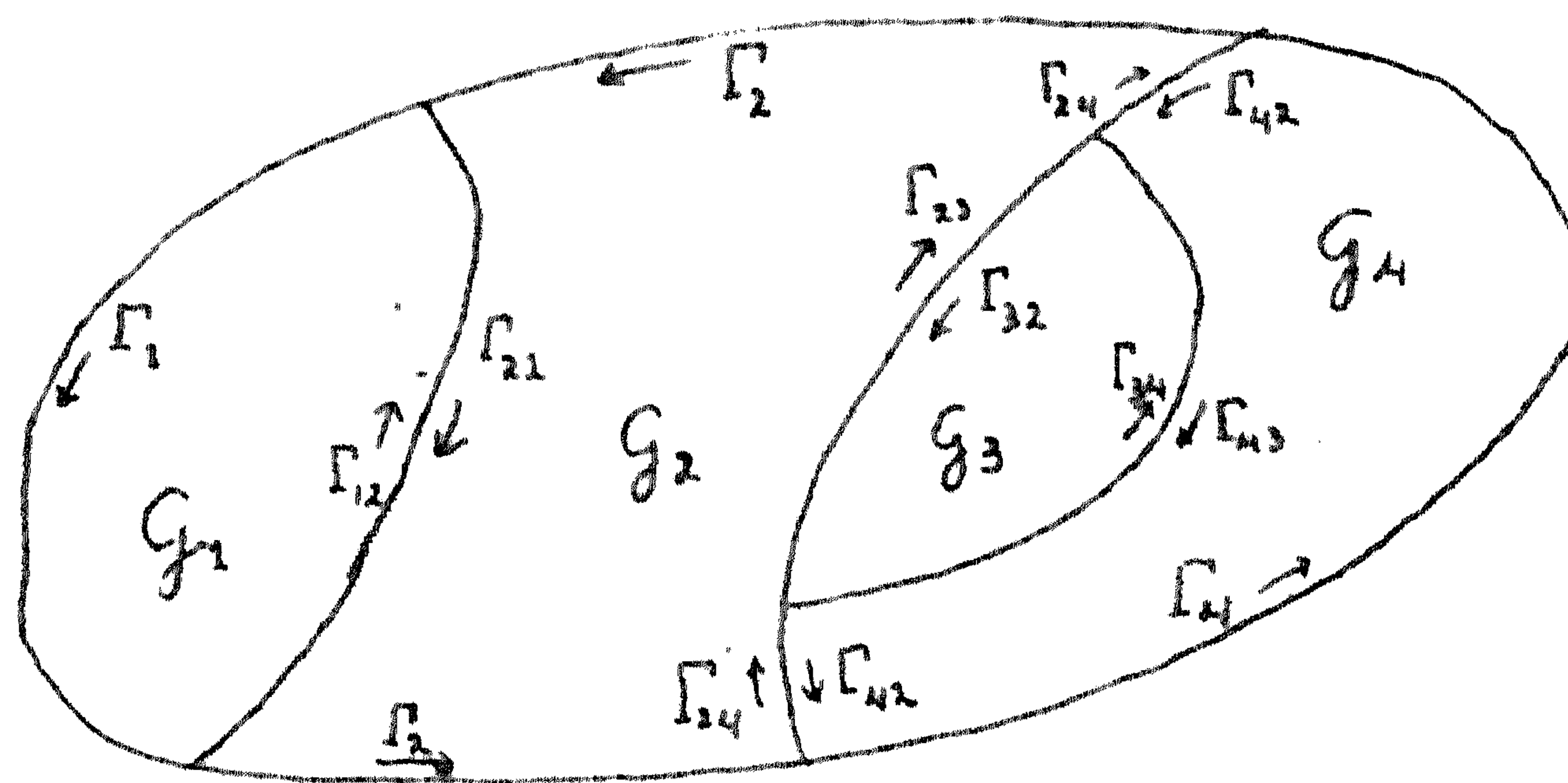


fig.2.1

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 \\ \Gamma^{(1)} &= \Gamma_1 + \Gamma_{12} \\ \Gamma^{(2)} &= \Gamma_2 + \Gamma_{21} + \Gamma_{23} + \Gamma_{24} \\ \Gamma^{(3)} &= \Gamma_{32} + \Gamma_{34} \\ \Gamma^{(4)} &= \Gamma_4 + \Gamma_{42} + \Gamma_{43}. \end{aligned}$$

We gaan weer uit van de vergelijkingen van Schalkwijk (zie voor de betekenis der letters TW 23, pag. 4). Daar de diepte nu slechts in ieder der gebieden G_j constant is, gelden deze slechts in het inwendige der gebieden G_j .

$$\text{Zij } \lambda_j = \frac{D}{4\pi H_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.1)$$

dan geldt in G_j ($j = 1, \dots, n$)

$$\vec{k} \times \vec{S} + \lambda_j \vec{S} = \frac{1}{\rho} \vec{W} - g H_j \text{ grad } \zeta, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \vec{S} = 0. \quad (2.3)$$

Als randvoorwaarde langs de rand Γ van G (de kust) eisen we dat de normale component van $\vec{S}$ daar nul is.

Als overgangsvoorwaarden langs de gemeenschappelijke rand Γ_{jk} van G_j en G_k ($j, k = 1, \dots, n$) eisen we

3) We nemen aan dat de grootheid D (de "Reibungstiefe" van Ekman) niet van H afhangt. Dit is hoogstens in eerste benadering juist.

- 1°. $\vec{S}$ is continu,
- 2°. de normale component van $\vec{S}$ is continu.⁴⁾

Deze overgangsvoorwaarden zijn fysisch betrekkelijk vanzelfsprekend.

We zullen nu weer potentialen en een stroomfunctie invoeren.

Allereerst merken we op dat de in TW 23 gegeven definitie van de windpotentialen U en V geen verandering behoeft, daar hierin H noch λ voorkomt. We stellen dus weer

$$\vec{W} = - \frac{e g D}{4\pi} (\text{rot } \vec{k} U + \text{grad } V), \quad (2.4)$$

waarin $U = U(x,y)$ en $V = V(x,y)$ de windpotentialen zijn.

Op grond van opmerking 2 bij het bewijs van lemma 3 (TW 23) kunnen we aannemen dat U en V continu en eenwaardig zijn in $G + \Gamma$.

De definitie van de stroomfunctie $\Theta(x,y)$ kunnen we niet zonder meer uit TW 23 overnemen, daar $\vec{S}$ in het algemeen niet in geheel G continu differentieerbaar is ($\vec{S}$ behoeft immers bij een kromme Γ_{jk} niet continu te zijn, slechts de normale component is dat). Op grond van de gegeven rand- en overgangsvoorwaarden voor $\vec{S}$ blijkt echter dat ook in dit geval een in $G + \Gamma$ continu en eenwaardige stroomfunctie gedefinieerd kan worden, waarvoor in ieder der gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$ geldt

$$\text{rot } \vec{S} = - \frac{g D}{4\pi} \text{rot } \vec{k} \Theta \quad (2.5)$$

(langs $\Gamma^{(j)}$ moet in inwendige richting gedifferentieerd worden⁵⁾),

4) We nemen aan dat $\vec{S}$ continu is in ieder der afgesloten gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$, waarbij we met continuïteit op de rand van G_j natuurlijk bedoelen continuïteit bij nadering langs een willekeurige weg die geheel in G_j verloopt. In een punt van Γ_{jk} heeft $\vec{S}$ dus in het algemeen twee "waarden", een die continu aansluit bij de "waarden" uit G_j en een die aansluit bij de "waarden" uit G_k ; volgens de tweede overgangsvoorwaarde zijn echter de normale componenten van de twee "waarden" gelijk.

5) Met differentiatie in inwendige richting van een in $G_j + \Gamma^{(j)}$ gedefinieerde functie $\varphi(x,y)$ bedoelen we het volgende. De vector $\text{grad } \varphi$ wordt in een punt van $\Gamma^{(j)}$ gedefinieerd door de eis dat $d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot \vec{dr}$ voor alle aangroelingen $\vec{dr}$, waarvan de richting binnen G_j valt. Hierdoor is $\text{grad } \varphi$ geheel bepaald, mits we aannemen dat de rand $\Gamma^{(j)}$ bestaat uit eindig veel continu-differentieerbare krommen en geen keerpunten heeft. Verder is natuurlijk $\text{rot } \vec{k} \varphi = - \vec{k} \times \text{grad } \varphi$ en de partiele differentiaalquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ kunnen we formeel definieren als de kentallen van $\text{grad } \varphi$.

in een punt van Γ_{jk} vinden we bij differentiatie in de richting van G_j , resp. G_k de waarde van $\vec{S}$ aan de zijde van G_j , resp. G_k).

In appendix 1 bewijzen we namelijk de volgende stelling, die een uitbreiding is van lemma 1 uit TW 23:

Zij G een gebied van het hier beschouwde type. In ieder der afgesloten gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$) zij een vector-veld $\vec{v}_j(x, y)$ gedefinieerd, welke velden aan de volgende voorwaarden voldoen:

- 1°. $\vec{v}_j$ is continu in $G_j + \Gamma^{(j)}$,
- 2°. $\vec{v}_j$ is continu differentieerbaar in G_j en hier geldt

$$\operatorname{div} \vec{v}_j = 0,$$

- 3°. langs het gemeenschappelijke deel Γ_j van $\Gamma^{(j)}$ en Γ is de normale component van $\vec{v}_j$ nul,
- 4°. langs het gemeenschappelijke deel Γ_{jk} van $\Gamma^{(j)}$ en $\Gamma^{(k)}$ is de normale component van $\vec{v}_j$ gelijk aan die van $\vec{v}_k$.

Dan is er in $G + \Gamma$ een op een additieve constante na eenduidig bepaald scalar-veld $\varphi(x, y)$ met de volgende eigenschappen:

- 1°. φ is continu en eenwaardig in $G + \Gamma$,
- 2°. φ is continu differentieerbaar in $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$) en hier geldt

$$-\operatorname{rot} \vec{k} \varphi = \vec{v}_j$$

(op $\Gamma^{(j)}$ moet in inwendige richting gedifferentieerd worden, in een punt van Γ_{jk} geldt bij differentiatie in de richting van G_j , resp. G_k dat $-\operatorname{rot} \vec{k} \varphi = \vec{v}_j$, resp. $\vec{v}_k$).

Nemen we in deze stelling voor de velden $\vec{v}_j$ het in ieder der gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$ continue veld $\frac{4\pi l}{gD} \vec{S}$, dat op grond van (2.5) en de rand- en overgangsvoorwaarden ook aan de andere voorwaarden van de stelling voldoet, dan volgt hieruit direct de bewering.

Op dezelfde manier als in TW 23 blijkt vervolgens dat er complexe functies

$$\Omega_j(z) = \Phi_j(x, y) + i\Psi_j(x, y) \quad (j = 1, \dots, n)$$

van $z = x + iy$ zijn die continu zijn in $G_j + \Gamma^{(j)}$ en analytisch in G_j en waarvoor in $G_j + \Gamma^{(j)}$ geldt

$$\Theta = \lambda_j^{-1}(\Phi_j + U), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L} = \Phi_j + U - \lambda_j(\Psi_j + V). \quad (2.7)$$

We kunnen nu ook onze overgangs- en randvoorwaarden in de Φ_j en Ψ_j 's uitdrukken.

De eerste overgangsvoorwaarde levert direct met (2.7): langs $\Gamma_{jk} (j, k=1, \dots, n)$ geldt

$$\Phi_j - \lambda_j (\Psi_j + V) = \Phi_k - \lambda_k (\Psi_k + V) \quad (2.8)$$

en daar met behulp van de tweede overgangsvoorwaarde aangetoond is dat we kunnen eisen dat Θ continu is in $G + \Gamma$, volgt uit (2.6) langs $\Gamma_{jk} (j, k=1, \dots, n)$ geldt

$$\lambda_j^{-1} (\Phi_j + U) = \lambda_k^{-1} (\Phi_k + U). \quad (2.9)$$

Tenslotte volgt uit de randvoorwaarde op dezelfde manier als in TW 23

langs $\Gamma_j (j = 1, \dots, n)$ geldt

$$\Phi_j + U = \text{const} \quad (2.10)$$

en deze constante heeft langs samenhangende delen van Γ dezelfde waarde.

Opmerking. Als Γ uit meerdere, niet samenhangende delen bestaat (in het geval dat G niet enkelvoudig samenhangend is; ook voor Γ_j kan dat al het geval zijn) behoeft de constante op deze delen natuurlijk niet dezelfde waarde aan te nemen.

In appendix 2 bewijzen we dat door de overgangs- en randvoorwaarden (2.8), (2.9), en (2.10) de functies $\Omega_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) (die analytisch in G en continu in $G_j + \Gamma^{(j)}$ moeten zijn) eenduidig bepaald zijn op additieve constanten c_j na. Deze additieve constanten hangen echter onderling samen: we kunnen de additieve constante in $\Omega_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) schrijven als

$$c_j = \lambda_j C + i(C - \lambda_j^{-1} C'), \quad (2.11)$$

waarin C en C' willekeurige reële getallen zijn.

Met (2.6) en (2.7) volgt hieruit dat Θ bepaald is op de additieve constante C na en $\hat{C}$ op de additieve constante C' na.

De vrije additieve constante in Θ (die fysisch onbelangrijk is) kunnen we bepalen door de eis dat Θ nul is op de "buitenrand" van G . En de vrije constante in $\hat{C}$ kunnen we bepalen door de eis dat $\hat{C}$ een voorgeschreven waarde heeft in een zeker punt van G of door de eis

$$\iint_G \hat{C} d\sigma = 0.$$

Dit alles geldt bij gegeven vaste windpotentialen. Op dezelfde wijze als in TW 23 (pag.9) kunnen we echter laten zien, dat als we andere windpotentialen kiezen, die hetzelfde windveld voorstellen, wel de functies $\Omega_1(z)$ veranderen, doch dat de "fysische functies" Θ en $\mathcal{L}$ niet veranderen.

Als het gebied G niet begrensd is, dan kunnen de meeste van de bovenstaande resultaten direct gegeneraliseerd worden. Met betrekking tot de eenduidigheid van de oplossing geldt hetzelfde voorbehoud als in TW 23.

3. Twee gebieden met verschillende diepten. Reductie tot een integraalvergelijking.

Indien het gebied G bestaat uit slechts twee deelgebieden G_1 en G_2 (die we hier enkelvoudig samenhangend en begrensd zullen veronderstellen) met randen $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1 + \Gamma_{12}$, resp. $\Gamma^{(2)} = \Gamma_2 + \Gamma_{12}$ (zie

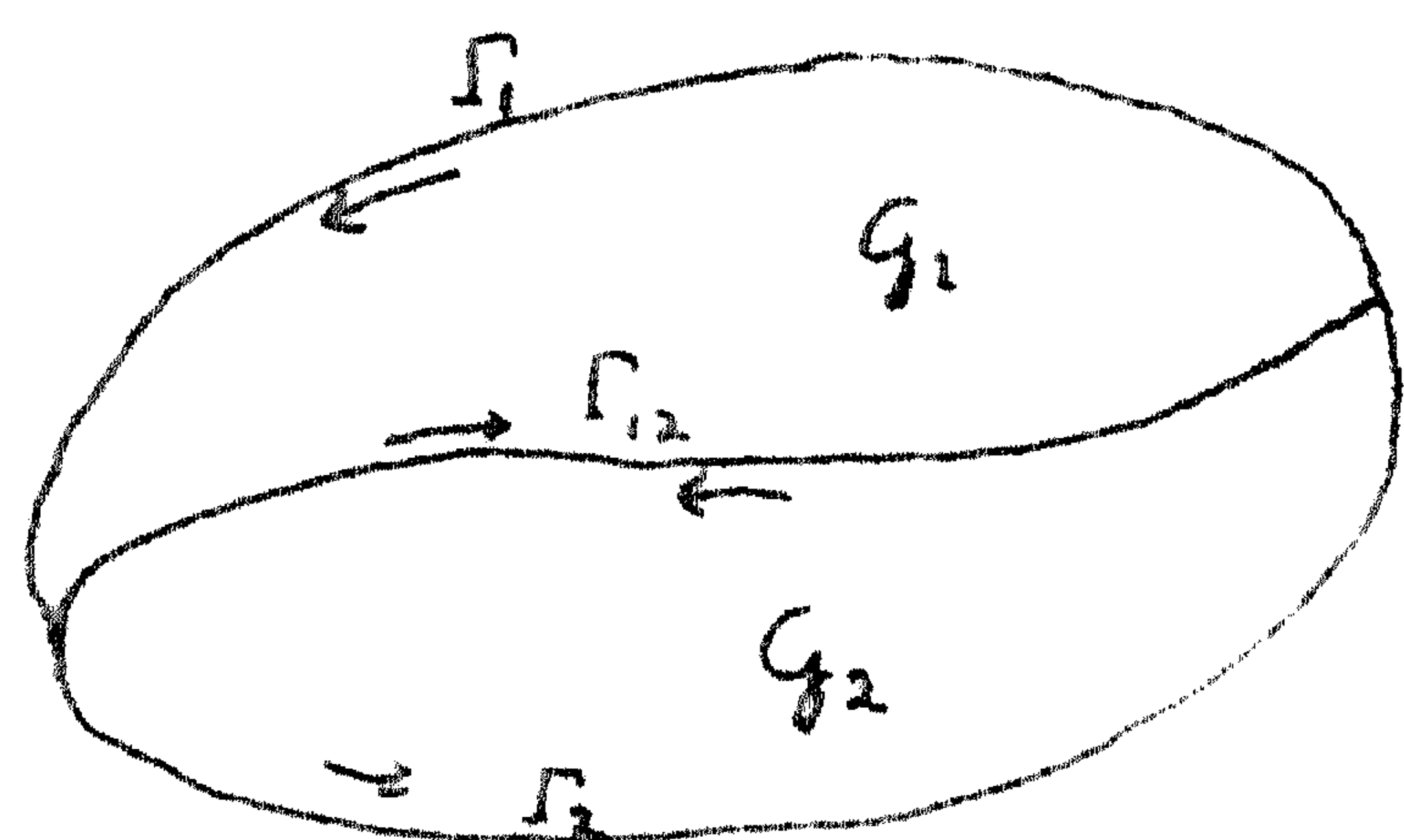


fig.3.1

fig.3.1) dan luiden de rand- en overgangsvoorwaarden

$$\Gamma_1 : \Phi_1 = -U, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_2 : \Phi_2 = -U, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_{12} : \begin{cases} \lambda_1^{-1}(\Phi_1 + U) = \lambda_2^{-1}(\Phi_2 + U) \\ \Phi_1 - \lambda_1(\Psi_1 + V) = \\ = \Phi_2 - \lambda_2(\Psi_2 + V) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

Zij $\mathcal{L}_k(z)$ ($k = 1, 2$) een functie die analytisch is in G_k en continu in $G_k + \Gamma^{(k)}$ en zodanig dat op $\Gamma^{(k)}$ geldt

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_k = -U \quad (3.5)$$

Deze functies bestaan daar U op $\Gamma^{(k)}$ continu is en kunnen gevonden worden met behulp van de integraal van Poisson-Schwarz:

$$\mathcal{L}_k(z) = -\frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma^{(k)}} \frac{f_k'(t)}{f_k(t) - f_k(z)} U(t) dt \quad (3.6)$$

wanneer $w = f_k(z)$ een in G_k analytische functie is die dit gebied conform afbeeldt op het bovenste halve vlak $\operatorname{Im} w > 0$ (vgl. TW 23, 9).

$$\text{Stel } \Omega_k(z) = \Omega_k^*(z) + \Lambda_k(z) \quad (k = 1, 2) \quad (3.7)$$

Dan luiden voor de functies $\Omega_k^*(z)$ ($k = 1, 2$), die in G_k analytisch en in $G_k + \Gamma^{(k)}$ continu moeten zijn, de rand- en overgangsvoorwaarden

$$\Gamma_1: \Phi_1^* = 0, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_2: \Phi_2^* = 0, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{12}: \lambda_1^{-1} \Phi_1^* = \lambda_2^{-1} \Phi_2^* \quad (3.10)$$

$$\Phi_1^* - \lambda_1(\Psi_1^* + V + \text{Im} \Lambda_1) = \Phi_2^* - \lambda_2(\Psi_2^* + V + \text{Im} \Lambda_2) \quad (3.11)$$

We zullen dit probleem nu herleiden tot een z.g. singuliere integraalvergelijking met kern van het Cauchy-type. Deze herleiding gaat het eenvoudigste met behulp van een tweetal formules van Plemelj, die in de theorie van dit type integraalvergelijkingen en verwante problemen een essentiële rol spelen (vgl. Muskhelishvili, [3]).

Zij Γ een continu differentieerbare kromme zonder dubbelpunten in het z -vlak. Zij $\varphi(z)$ een op Γ gedefinieerde reële of complexe functie die daar voldoet aan een z.g. Hölder-voorwaarde:

er zijn positieve constanten A en μ , zodanig dat voor ieder tweetal punten z_1 en z_2 van Γ geldt

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq A |z_1 - z_2|^\mu \quad (3.12)$$

We beschouwen nu de functie

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (3.13)$$

Deze functie is analytisch en eenwaardig in het gehele z -vlak, behalve op Γ en nadert (behalve eventueel in de eindpunten van Γ) continu tot een eindige limiet als z tot een punt z_0 van Γ nadert langs een weg die met Γ geen punten gemeen heeft. Noemen we de + zijde (- zijde) van Γ die zijde die links (rechts) van Γ ligt als Γ in de integratie-richting doorlopen wordt, dan geldt bij nadering van de + zijde tot z_0

$$\Omega^+(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0 (+)} \Omega(z) = \frac{1}{2} \varphi(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z_0} dt \quad (3.14)$$

en bij nadering van de - zijde

$$\Omega^-(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0 (-)} \Omega(z) = -\frac{1}{2} \varphi(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z_0} dt. \quad (3.15)$$

6) Uit (3.12) zien we dat $\varphi(z)$ zeker continu moet zijn. Omgekeerd geldt dat als $\varphi(z)$ een continue afgeleide (langs Γ) heeft, dan voldoet $\varphi(z)$ aan de voorwaarde (3.12) met $\mu = 1$. De meeste "gewone" functies voldoen dus aan de Hölder-voorwaarde.

In deze formules van Plemelj moeten de integralen opgevat worden als hoofdwaarden (in z_0) in de zin van Cauchy. Een andere schrijfwijze voor deze formules is

$$\Omega^+(z_0) - \Omega^-(z_0) = \varphi(z_0), \quad (3.16)$$

$$\Omega^+(z_0) + \Omega^-(z_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z_0} dt. \quad (3.17)$$

De functies $\Omega^+(z_0)$ en $\Omega^-(z_0)$ voldoen weer aan de Hölder-voorwaarde. Voor een uitvoerige behandeling en bewijzen van het bovenstaande verwijzen we naar Muskhelishvili, [3].

Indien de waarden van Φ_1^* en Φ_2^* langs Γ_{12} bekend waren, dan konden we, gebruik makend van (3.8) en (3.9), $\Omega_1^*(z)$ en $\Omega_2^*(z)$ geheel bepalen.

Zij nu langs Γ_{12}

$$\Phi_1^* = \lambda_1 \varphi(z), \quad \Phi_2^* = \lambda_2 \varphi(z), \quad (3.18)$$

waarin $\varphi(z)$ een nog onbekende reële functie is die we onderwerpen aan de bijvoorwaarde dat $\varphi(z)$ nul is in de eindpunten van Γ_{12} , omdat Φ_1^* , resp. Φ_2^* continu moet zijn op $\Gamma^{(1)}$, resp. $\Gamma^{(2)}$. We kunnen dan $\Omega_1^*(z)$ en $\Omega_2^*(z)$ en dus speciaal de waarden van Ψ_1^* en Ψ_2^* langs Γ_{12} uitdrukken in $\varphi(z)$. Daar op grond van (3.18) reeds aan (3.10) voldaan is, blijft dan (3.11) ter bepaling van de functie $\varphi(z)$.

Volgens de formule van Poisson-Schwarz volgt uit (3.8), (3.9) en (3.18) (de waarden van Φ_1^* resp. Φ_2^* zijn continu op $\Gamma_1 + \Gamma_{12}$, resp. $\Gamma_2 + \Gamma_{12}$, dank zij de bijvoorwaarden voor $\varphi(z)$ in de eindpunten van Γ_{12})

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^*(z) &= \frac{\lambda_1}{\pi i} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_1'(t)}{f_1(t) - f_1(z)} \varphi(t) dt + i c_1 \\ \Omega_2^*(z) &= - \frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_2'(t)}{f_2(t) - f_2(z)} \varphi(t) dt + i c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

wanneer Γ_{12} zo doorlopen wordt dat G_1 links van Γ_{12} ligt; c_1 en c_2 zijn vrije reële constanten en f_1 en f_2 zijn de reeds vermelde afbeeldingsfuncties.

Eisen we verder nog dat $\varphi(z)$ op Γ_{12} aan de Hölder-voorwaarde voldoet, dan volgt door directe generalisatie uit de formules (3.14), resp. (3.15) van Plemelj dat voor een punt z_0 van Γ_{12} geldt

$$\Omega_1^*(z_0) = \lambda_1 \varphi(z_0) + \frac{\lambda_1}{\pi i} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_1'(t)}{f_1(t) - f_1(z_0)} \varphi(t) dt + i c_1.$$

$$\Omega_2^*(z_0) = \lambda_2 \varphi(z_0) - \frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_2'(t)}{f_2(t) - f_2(z_0)} \varphi(t) dt + i c_2.$$

Daar op Γ_{12} $f_k(t)$, $f_k(z_0)$ en $f_k'(t)dt$ ($k = 1, 2$) reëel zijn ($f_k(z)$ beeldt Γ_{12} af op een deel van de reële as), volgt hieruit dat op Γ_{12} geldt

$$\Psi_1^*(z_0) = - \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_1'(t)}{f_1(t) - f_1(z_0)} \varphi(t) dt + c_1, \quad (3.20)$$

$$\Psi_2^*(z_0) = \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{\Gamma_{12}} \frac{f_2'(t)}{f_2(t) - f_2(z_0)} \varphi(t) dt + c_2, \quad (3.21)$$

waarin de integralen natuurlijk weer als hoofdwwaarden zijn bedoeld.

Vullen we nu (3.18), (3.20) en (3.21) in in (3.11) dan krijgen we ter bepaling van $\varphi(z)$ de volgende integraalvergelijking, geldig voor z_0 op Γ_{12}

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \varphi(z_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_{12}} \left\{ \frac{\lambda_1^2 f_1'(t)}{f_1(t) - f_1(z_0)} + \frac{\lambda_2^2 f_2'(t)}{f_2(t) - f_2(z_0)} \right\} \varphi(t) dt = \\ = \lambda_2 \operatorname{Im} \Lambda_2(z_0) - \lambda_1 \operatorname{Im} \Lambda_1(z_0) + (\lambda_2 - \lambda_1) v(z_0) + C, \end{aligned} \quad (3.22)$$

waarin $C = \lambda_2 c_2 - \lambda_1 c_1$. (3.23)

De kern van deze integraalvergelijking is

$$K(z_0, t) = \frac{\lambda_1^2 f_1'(t)}{f_1(t) - f_1(z_0)} + \frac{\lambda_2^2 f_2'(t)}{f_2(t) - f_2(z_0)}.$$

Door ontwikkeling blijkt direct, dat we kunnen schrijven

$$K(z_0, t) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{t - z_0} + k(z_0, t),$$

waarin $k(z_0, t)$ begrensd is voor alle t en z_0 op Γ_{12} . $K(z_0, t)$ is dus singulier in het punt $t = z_0$ en wel van het Cauchy-type. ⁷⁾

We zullen de theorie en de oplossingsmethoden, die door Muskhelishvili, [3] uitvoerig behandeld worden, hier niet bespreken. Slechts merken we op dat door de gestelde nevenvoorwaarde (dat $\varphi(z)$ nul is in de eindpunten van Γ_{12}) de constante C eenduidig bepaald is - slechts voor één waarde C_0 van C heeft de vergelijking (3.22) een oplossing die aan deze nevenvoorwaarde voldoet (en welke inderdaad ook aan de Hölder-voorwaarde blijkt te voldoen). Hierdoor zijn dan ook de constanten c_1 en c_2 gedeeltelijk bepaald, uit (3.23) volgt dan nl. $c_1 = \lambda_1^{-1}(C' - \frac{1}{2} C_0)$, $c_2 = \lambda_2^{-1}(C' + \frac{1}{2} C_0)$, waarin C' een vrije reële constante is. Dit komt voor de functies $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ neer op de

7) In het punt van $\Gamma_k + \Gamma_{12}$ ($k = 1, 2$) dat door de afbeelding $w = f_k(z)$ op het punt $w = \infty$ wordt afgebeeld, wordt $f_k(z)$ en ook $f_k'(z)$ oneindig. Zorgen we dat dit punt niet op Γ_{12} ligt, dan hebben we daarvan in de functie $K(z_0, t)$ geen last.

onbepaaldheid die we reeds in 2. constateerden (het reële deel van deze functies ligt door de eisen (3.1) en (3.2) wel eenduidig vast).

In het algemeen kan de vergelijking (3.22) teruggebracht worden tot een integraalvergelijking met reguliere kern. Deze integraalvergelijking is echter alleen eenvoudig op te schrijven, indien de afbeeldingsfuncties $f_1(z)$ en $f_2(z)$ rationaal zijn. Daar de gebieden, die ons het meest interesseren, rechthoekig van vorm zijn, waarbij elliptische functies als afbeeldingsfuncties behoren, zal de oplossing van de integraalvergelijking (3.22) in deze gevallen slechts langs numerieke weg mogelijk zijn. We gaan daar hier niet verder op in.

Opmerking.

Het geval, waarin de gebieden G_1 en G_2 niet beide begrensd zijn, kan op vrijwel analoge wijze behandeld worden. Slechts moet rekening gehouden worden met het feit dat de complexe potentiaal voor een onbegrensd gebied slechts dan geheel bepaald is, wanneer het gedrag in het oneindige wordt voorgeschreven (vgl. TW 23, pag.11).

4. Twee gebieden met sterk verschillende diepte.

Iteratie-methode.

We beschouwen nog eens het geval dat G bestaat uit slechts twee deelgebieden met verschillende diepte. Hiervoor gelden de rand- en overgangsvoorwaarden (3.1) t/m (3.4).

Zij nu de diepte in het gebied G_1 groot ten opzichte van die in G_2 . Dit komt er op neer dat

$$\epsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1. \quad (4.1)$$

We schrijven de overgangsvoorwaarden (3.3) en (3.4) nu als volgt:

$$\begin{aligned} \text{langs } \Gamma_{12} \text{ geldt } \quad & \Phi_1 + U = \epsilon (\Phi_2 + U), \\ & \Phi_2 + U - \lambda_2 (\Psi_2 + V) = \Phi_1 + U - \epsilon \lambda_2 (\Psi_1 + V). \end{aligned}$$

Elimineren we $\Phi_1 + U$ uit de tweede vergelijking en stellen we

$$\lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{1-\epsilon}, \quad (4.2)$$

dan kunnen we de rand- en overgangsvoorwaarden ook als volgt formuleren

$$\begin{cases} \Gamma_1: & \Phi_1 = -U \\ \Gamma_{12}: & \Phi_1 = -U + \epsilon (\Phi_2 + U) \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.3) \\ (4.4) \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2 : \Phi_2 = -U \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12} : \Phi_2 - \lambda_2' \Psi_2 = -U + \lambda_2' V - \epsilon \lambda_2' (\Psi_1 + V) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Deze vorm suggereert direct een mogelijkheid van successieve approximatie. We stellen

$$\begin{aligned} \Omega_1(z) &= \Omega_1^{(0)}(z) + \epsilon \Omega_1^{(1)}(z) + \epsilon^2 \Omega_1^{(2)}(z) + \dots, \\ \Omega_2(z) &= \Omega_2^{(0)}(z) + \epsilon \Omega_2^{(1)}(z) + \epsilon^2 \Omega_2^{(2)}(z) + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

en substitueren deze uitdrukkingen in (4.3) t/m (4.6). Eisen we dat de coëfficiënten van de verschillende machten van ϵ alle nul zijn, dan vinden we voor de functies $\Omega_1^{(k)}(z)$ en $\Omega_2^{(k)}(z)$ ($k = 0, 1, \dots$) de volgende randvoorwaarden:

$$\Omega_1^{(0)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : \Phi_1^{(0)} = -U \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(0)} = -U \end{array} \right. \quad (4.8a)$$

$$\Omega_2^{(1)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2 : \Phi_2^{(0)} = -U \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \Psi_2^{(0)} = -U + \lambda_2' V \end{array} \right. \quad (4.9a)$$

$$\Omega_1^{(1)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : \Phi_1^{(1)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(1)} = \Phi_2^{(0)} + U \end{array} \right. \quad (4.8b)$$

$$\Omega_2^{(1)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2 : \Phi_2^{(1)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(1)} - \lambda_2' \Psi_2^{(1)} = -\lambda_2' (\Psi_1^{(0)} + V) \end{array} \right. \quad (4.9b)$$

en voor $k \geq 2$

$$\Omega_1^{(k)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : \Phi_1^{(k)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(k)} = \Phi_2^{(k-1)} \end{array} \right. \quad (4.8c)$$

$$\Omega_2^{(k)}(z) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2 : \Phi_2^{(k)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(k)} - \lambda_2' \Psi_2^{(k)} = -\lambda_2' \Psi_1^{(k-1)} \end{array} \right. \quad (4.9c)$$

Met de randvoorwaarden (4.8a) kunnen we direct $\Omega_1^{(0)}$ bepalen. En in de volgende paragraaf zullen we laten zien dat uit de voorwaarden (4.9a) $\Omega_2^{(0)}(z)$ te bepalen is. Zijn deze functies bekend, dan kan met (4.8b) $\Omega_1^{(1)}(z)$ en met (4.9b) $\Omega_2^{(1)}(z)$ bepaald worden (de door (4.8b) gegeven randwaarden voor $\Phi_1^{(1)}$ langs $\Gamma_1 + \Gamma_{12}$ zijn continu in de eindpunten van Γ_{12} , daar hier volgens (4.9a) geldt dat $\Phi_2^{(0)} = -U$), enz.

Essentieel is, dat op deze wijze het oorspronkelijke probleem, waar we te maken hadden met twee, in verschillende gebieden gedefinieerde functies, waarvoor rand- en overgangsvoorwaarden gegeven waren, gereduceerd hebben tot een aantal problemen, waarin **steeds** slechts één onbekende functie voorkomt, voor welke uitsluitend randvoorwaarden gegeven zijn.

De convergentie van het hier geschetste iteratie-procede zullen we hier niet onderzoeken. In het algemeen zal deze wel verzekerd zijn.

We beschouwen nu nog het geval dat ϵ zeer klein is (dus dat de diepte in G_1 groot is t.o.v. die in G_2) en vragen speciaal naar de interpretatie van de randvoorwaarden voor $\Omega_1^{(0)}(z)$ en $\Omega_2^{(0)}(z)$. In dit geval is $\lambda_2' \approx \lambda_2$, zodat we in goede benadering voor (4.8a) en (4.9a) kunnen schrijven ⁸⁾

$$\Omega_1^{(0)}(z): \Gamma_1 + \Gamma_{12} : \Phi_1^{(0)} = -U \quad (4.8a)$$

$$\Omega_2^{(0)}(z): \begin{cases} \Gamma_2 \\ \Gamma_{12} \end{cases} : \begin{cases} \Phi_2^{(0)} = -U \\ \Phi_2^{(0)} + U - \lambda_2(\Psi_2^{(0)} + V) = 0 \end{cases} \quad (4.9d)$$

Hieruit volgt:

voor de stroming in het (diepe) gebied G_1 gedraagt de grenslijn Γ_{12} zich in nulde benadering als een kust; de stroming in het (ondiepe) gebied G_2 is zodanig, dat langs de grenslijn Γ_{12} in nulde benadering het windeffect $\mathcal{C}$ nul is (vgl. formule (2.8)). Deze resultaten zijn ook fysisch zeer begrijpelijk. Voor het eerste behoeft dat geen betoog, het tweede zien we in als we bedenken dat gezien vanuit het ondiepe gedeelte het diepe gedeelte zich gedraagt als een reservoir met zeer grote capaciteit, waar water in en uit kan stromen, zonder dat daarvoor een noemenswaardig verhang nodig is.

8) Deze voorwaarden ontstaan ook uit (4.3) t/m (4.6) als we daarin zonder meer $\epsilon = 0$ en $\lambda_2' = \lambda_2$ stellen.

Opmerking.

We kunnen ook iteratie-schema's opstellen die direct gebaseerd zijn op de bovenstaande fysische overwegingen. Voor een eerste benadering $\Omega_1^I(z)$ van $\Omega(z)$ nemen we dan langs Γ_{12} de randvoorwaarde van een kust. Uit deze $\Omega_1^I(z)$ kunnen we de bijbehorende opwaaiing ζ langs Γ_{12} vinden en hiermee bepalen we nu een eerste benadering $\Omega_2^I(z)$ voor $\Omega_2(z)$ door te eisen dat de uit $\Omega_2^I(z)$ volgende opwaaiing langs de kust gelijk is aan die welke uit $\Omega_1^I(z)$ volgt. Bij de functie $\Omega_2^I(z)$ behoort een stroomfunctie Θ langs Γ_{12} , die aangeeft hoeveel water door het grensvlak stroomt. Hiermee kunnen we een betere benadering voor $\Omega_1(z)$ vinden: door aan te nemen dat langs Γ_1 de door $\Omega_2^I(z)$ gegeven hoeveelheid water in of uit stroomt (in eerste instantie hadden we deze in- en uitstroming verwaarloosd). Enz. Voor de N^e benaderingen van Ω_1 en Ω_2 zien de randvoorwaarden er dus als volgt uit (vgl. de formules (2.6) en (2.7) voor Θ en ζ)

$$\Omega_1^{(N)}(z): \begin{cases} \Gamma_1 & : \quad \Phi_1^{(N)} = -U \\ \Gamma_{12} & : \quad \lambda_1^{-1} (\Phi_1^{(N)} + U) = \lambda_2^{-1} (\Phi_2^{(N-1)} + U) \\ & \quad \text{(resp. = 0 voor } N = 0) \end{cases}$$

$$\Omega_2^{(N)}(z): \begin{cases} \Gamma_2 & : \quad \Phi_2^{(N)} = -U \\ \Gamma_{12} & : \quad \Phi_2^{(N)} + U - \lambda_2 (\Psi_2^{(N)} + V) = \Phi_1^{(N)} + U - \lambda_1 (\Psi_1^{(N)} + V). \end{cases}$$

Dat dit schema veel lijkt op het hierboven behandelde, zien we als we $\Omega_k^{(N)}(z) - \Omega_k^{(N-1)}(z) = \delta \Omega_k^{(N)}$ ($k = 1, 2$) stellen (te vergelijken met de grootheden $\varepsilon^n \Omega_k^{(n)}$ uit het vorige). Hiervoor gelden de randvoorwaarden:

$$\delta \Omega_1^{(N)}: \begin{cases} \Gamma_1 & : \quad \delta \Phi_1^{(N)} = 0 \\ \Gamma_{12} & : \quad \delta \Phi_1^{(N)} = \varepsilon \delta \Phi_2^{(N-1)} \end{cases}$$

$$\delta \Omega_2^{(N)}: \begin{cases} \Gamma_2 & : \quad \delta \Phi_2^{(N)} = 0 \\ \Gamma_{12} & : \quad \delta \Phi_2^{(N)} - \lambda_2 \delta \Psi_2^{(N)} = \delta \Phi_1^{(N)} - \lambda_1 \delta \Psi_1^{(N)} \\ & \quad = \varepsilon (\delta \Phi_2^{(N-1)} - \lambda_2 \delta \Psi_1^{(N)}). \end{cases}$$

Met uitzondering van de laatste voorwaarde lijkt dit veel op de voorwaarde (4.8c) en (4.9c). De laatste voorwaarde is echter iets onvoordeliger dan de overeenkomstige in (4.9c), daar ook $\delta \phi_2^{(N-1)}$ hierin voorkomt. In (4.9) is dat niet het geval omdat in (4.6) de grootheden Φ_1 niet meer voorkomt.

5. Zee, grenzend aan een andere zee met veel groter diepte.

Zij G een begrensd, enkelvoudig samenhangend gebied, waarvan de rand Γ bestaat uit delen Γ_1 en Γ_2 . Γ_1 zij de grenslijn tussen G en een andere zee met zeer veel grotere diepte. Hier geldt volgens (4.9d) (bij benadering) de randvoorwaarde

$$\Phi + U - \lambda(\Psi + V) = 0, \quad (5.1)$$

Γ_2 zij een kust, waar als randvoorwaarde geldt

$$\Phi + U = 0. \quad (5.2)$$

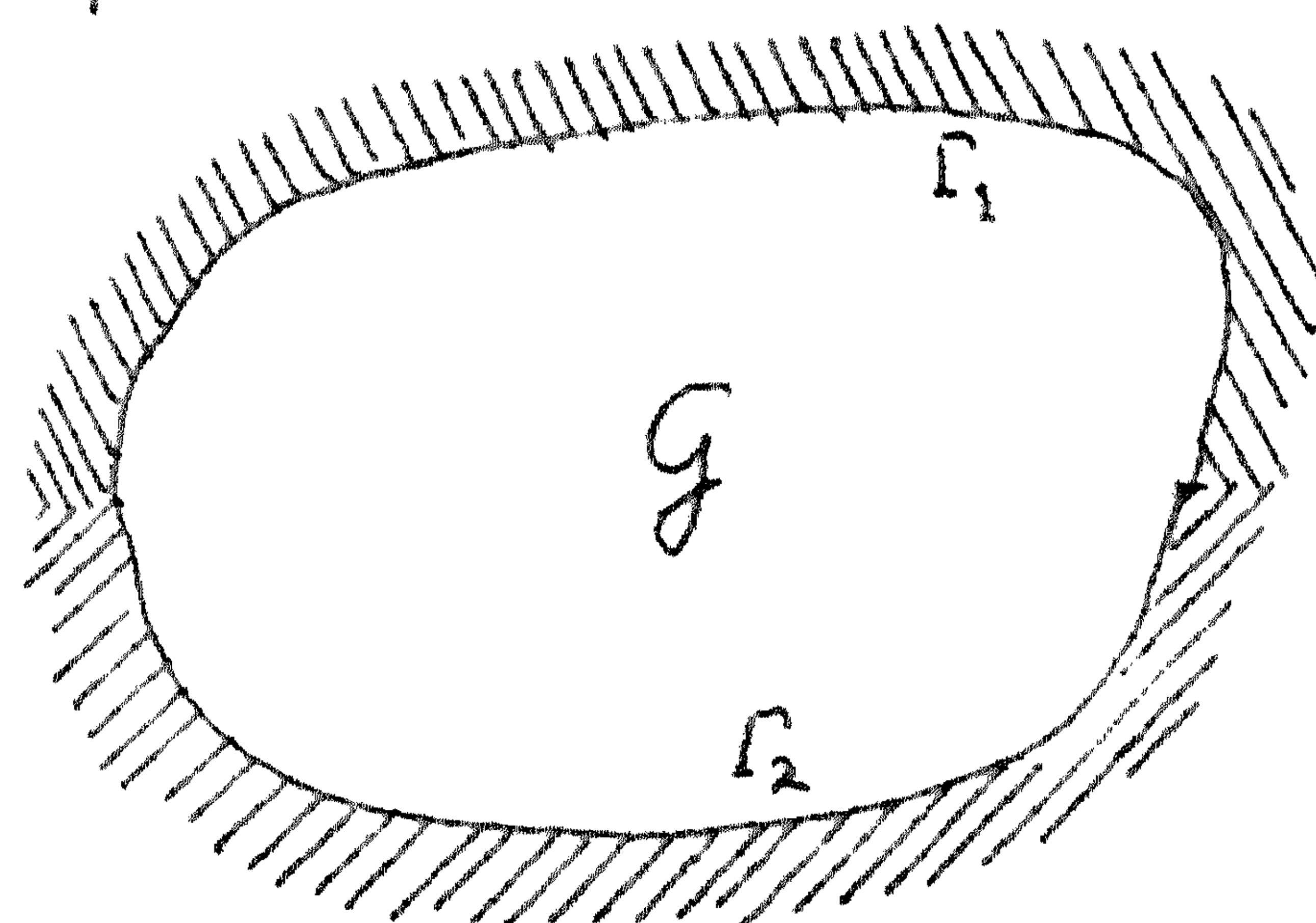


fig. 5.1

Hierin zijn weer Φ en Ψ reëel en imaginair deel van de complexe potentiaal $\Omega(z)$ die in G analytisch en in $G + \Gamma$ continu moet zijn.

We kunnen het probleem iets algemener stellen: gevraagd zij de functie $F^*(z)$ die analytisch is in G en continu op $G + \Gamma$, en voldoet aan de volgende randvoorwaarden

$$\text{langs } \Gamma_1: \operatorname{Re} F^*(z) - \lambda \operatorname{Im} F^*(z) = \varphi_1(z), \quad (5.3)$$

$$\text{langs } \Gamma_2: \operatorname{Re} F^*(z) = \varphi_2(z), \quad (5.4)$$

waarin $\varphi_1(z)$ en $\varphi_2(z)$ op Γ_1 , resp. Γ_2 gedefinieerde continue reële functies zijn, die aan de in 3. genoemde Hölder-voorwaarde voldoen ⁹⁾ en λ een positieve constante is.

Het is duidelijk dat de bepaling van de functies $\Omega_2^{(k)}(z)$ ($k = 0, 1, \dots$) ook onder deze probleemstelling valt (afgezien van de Hölder-voorwaarde; we kunnen echter aantonen dat hieraan bij de problemen uit 4. steeds voldaan is).

Het is prettig (hoewel niet noodzakelijk) om te beginnen met de bepaling van een functie $\Lambda_k(z)$ (met behulp van de formule van Poisson-Schwarz of op andere wijze), die analytisch is in G en continu op $G + \Gamma$ en waarvoor langs Γ_2 geldt

$$\operatorname{Re} \Lambda(z) = \varphi_2(z) \quad (5.5)$$

9) De functies U en V zijn continu differentieerbaar in $G + \Gamma$ en voldoen dus zeker aan de Hölder-voorwaarde.

(natuurlijk is door deze voorwaarde $\Lambda(z)$ nog geenszins eenduidig vastgelegd - we kunnen bv. het reële deel van $\Lambda(z)$ ook langs Γ_1 voorschrijven). Voor de functie $F(z) = F^*(z) - \Lambda(z)$ (5.7) gelden dan de volgende voorwaarden:

1°. $F(z)$ is analytisch in G en continu in $G + \Gamma$,

2°. langs Γ_1 geldt $\operatorname{Re} F(z) - \lambda \operatorname{Im} F(z) = \lambda \varphi(z)$, (5.8)

langs Γ_2 geldt $\operatorname{Re} F(z) = 0$, (5.9)

wanneer $\varphi(z)$ op Γ_1 gedefinieerd is door

$$\varphi(z) = \lambda^{-1} \{ \varphi_1(z) - \operatorname{Re} \Lambda(z) + \lambda \operatorname{Im} \Lambda(z) \}. \quad 10)$$

Men kan bewijzen dat de functie $\Lambda(z)$ zo gekozen kan worden, dat $\varphi(z)$ weer aan de Hölder-voorwaarde voldoet.

We beginnen nu met het geval dat het gebied G het halve vlak $\operatorname{Im} z > 0$ is en dat Γ_1 het deel $-1 < z < 1$ en Γ_2 het overige deel van de reële as is. Daarna zullen we door conforme afbeelding het probleem voor een willekeurig gebied hierop herleiden. Als extra eis bij het halve vlak (een niet-begrensd gebied) stellen we dat $F(z)$ tot een constante nadert als $z \rightarrow \infty$ (binnen G).

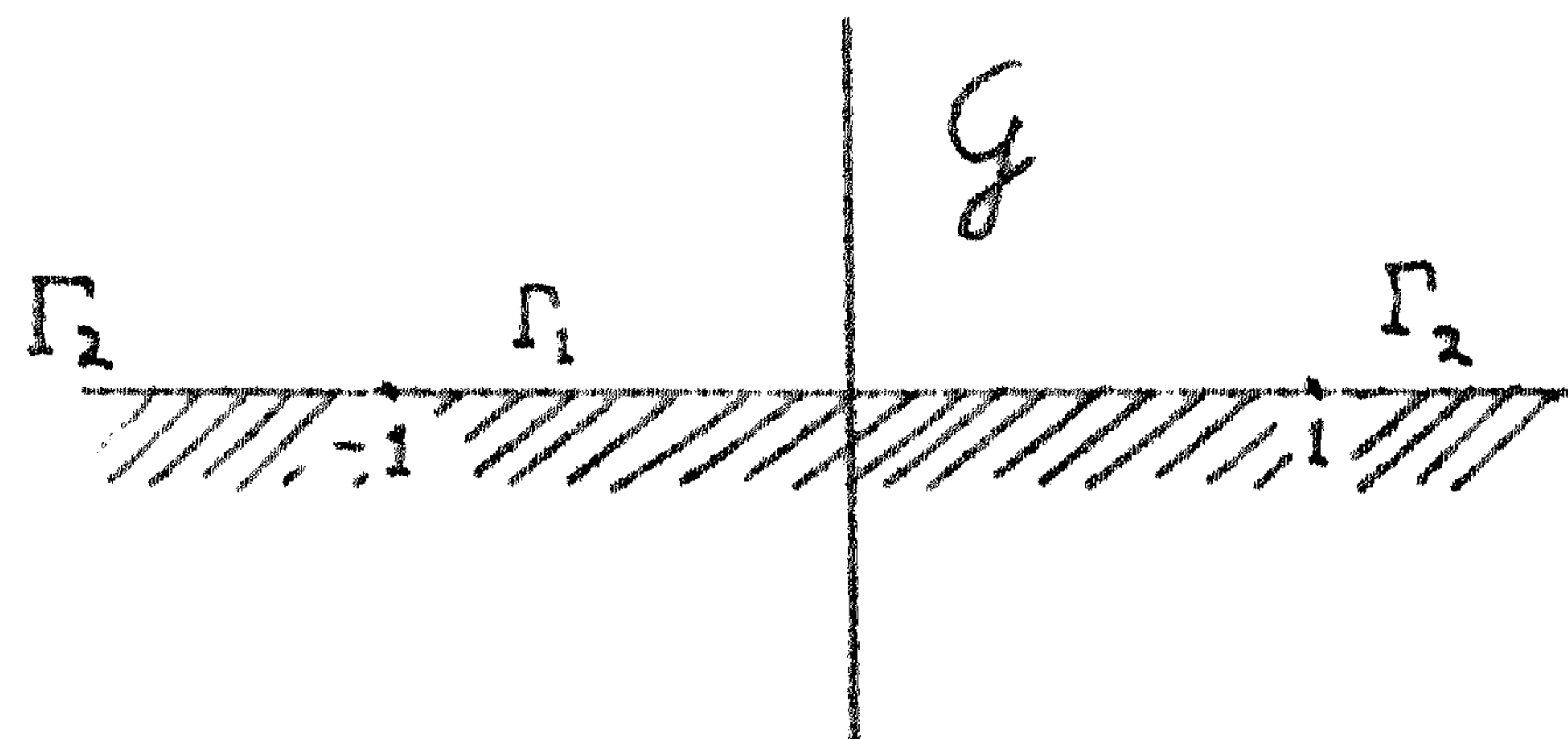


fig. 5.2

De te bepalen functie $F(z)$ is gedefinieerd en analytisch in het bovenste halve vlak. We kunnen echter $F(z)$ analytisch voortzetten in het onderste halve vlak door de definitie: in $z = x + iy$ met $y < 0$ is

$$F(z) = -\overline{F(\bar{z})} = -\operatorname{Re} F(x, -y) + i \operatorname{Im} F(x, -iy) \quad (5.10)$$

(met de streep is weer de complex geconjugeerde van een getal bedoeld). Het blijkt direct dat de aldus gedefinieerde functie $F(z)$ ook in het onderste halve vlak analytisch is (bv. uit de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann). Verder volgt uit (5.10) dat op de reële as geldt (de bovenzijde noemen we de + zijde)

$$F^-(x) = -\overline{F^+(x)}, \text{ en dus}$$

$$F^+(x) - F^-(x) = 2 \operatorname{Re} F^+(x) \quad (5.11)$$

$$F^+(x) + F^-(x) = 2 i \operatorname{Im} F^+(x) \quad (5.12)$$

Uit (5.11) en (5.9) volgt dan dat $F(z)$ continu is als we het deel Γ_2 van de reële as passeren. Volgens een welbekende stelling volgt

10) Als in (5.3), resp. (5.4) $\varphi_1 = -U + \lambda V$, $\varphi_2 = -U$, dan kunnen we voor Λ eisen dat $\operatorname{Re} \Lambda = -U$ langs $\Gamma_1 + \Gamma_2$, voor de functie $\varphi(z)$ vinden we dan $\varphi = \operatorname{Im} \Lambda + V$.

daaruit dat de door (5.10) in het onderste halve vlak gedefinieerde functie een eenwaardige analytische voortzetting is van de functie $F(z)$ uit het bovenste halve vlak.

Aan de bovenzijde van het deel Γ_1 van de reële as geldt (5.8), waaruit met (5.11) en (5.12) volgt dat langs Γ_1 geldt

$$(1+i\lambda) F^+(x) - (1-i\lambda) F^-(x) = 2\lambda \varphi(x). \quad (5.13)$$

Hier is dus $F(z)$ in het algemeen niet continu.

Voor de aldus uitgebreide functie $F(z)$ hebben we dus de volgende eisen

- 1°. $F(z)$ is analytisch in het gehele, langs Γ_1 "opengesneden" vlak en continu in de afsluiting van dit gebied,
- 2°. Langs Γ_1 geldt (5.13),
- 3°. $F(z)$ nadert tot een constante als $z \rightarrow \infty$.

We zullen de functie $F(z)$, die hieraan voldoet bepalen met behulp van een kunstgreep (voor een uitvoerige "afleiding" van deze kunstgreep zie men Muskhelishvili, [3], Ch.10).

Zij γ bepaald door

$$\operatorname{ctg} \pi \gamma = \lambda, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}. \quad (5.14)$$

Dan kunnen we voor (5.13) schrijven (na vermenigvuldiging met $-\sin \pi \gamma$)

$$e^{-\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} F^+(x) - e^{\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} F^-(x) = -2 \cos \pi \gamma \varphi(x). \quad (5.15)$$

Beschouw nu de functie $G(z) = (z+1)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (z-1)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F(z)$, (5.16)
waarin de meerwaardige factoren bepaald zijn door de eis dat

$$(z+1)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (z-1)^{-\frac{1}{2}-\gamma} = e^{(-\frac{1}{2}+\gamma)\ln(z+1) - (\frac{1}{2}+\gamma)\ln(z-1)},$$

waarin voor de logaritmen de hoofdwwaarden genomen worden (imaginair deel tussen $-\pi$ en $+\pi$).

Langs de reële as geldt dan

$$\text{voor } x > 1 \quad G^+(x) = G^-(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (x-1)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F(x),$$

$$\text{voor } -1 < x < 1 \quad \left. \begin{aligned} G^+(x) &= e^{-\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F^+(x), \\ G^-(x) &= e^{\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} (1+x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F^-(x), \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \text{voor } x < -1 \quad G^+(x) &= e^{\pi i(-\frac{1}{2}+\gamma)} \cdot e^{-\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} (-1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F(x) = \\ &= -(-1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F(x), \\ G^-(x) &= e^{-\pi i(-\frac{1}{2}+\gamma)} e^{\pi i(\frac{1}{2}+\gamma)} (-1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} F(x) = \\ &= G^+(x). \end{aligned}$$

Uit (5.15) en (5.17) volgt dat op Γ_1 dus geldt

$$G^+(x) - G^-(x) = -2 \cos \pi \gamma (1+x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} \varphi(x). \quad (5.18)$$

$G(z)$ voldoet dus aan de volgende eisen:

- 1°. $G(z)$ is analytisch en eenwaardig in het gehele langs Γ_1 open-
gesneden vlak en continu in de afsluiting van dit gebied,
behoudens de punten $z = \pm 1$, waar $G(z)$ in het algemeen niet
begrensd zal zijn.
- 2°. langs Γ_2 geldt (5.18).
- 3°. $G(z)$ gedraagt zich in het oneindige als z^{-1} .

$$^{\dagger} \text{De functie } G(z) = - \frac{\cos \pi \gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{t-z} \varphi(t) dt \quad (5.19)$$

voldoet aan al deze eisen op grond van een kleine uitbreiding van het
in het begin van 3. besprokene en de formule (3.16) van Plemelj (de
integrand van (5.19) is niet begrensd in $t = \pm 1$, de exponenten van
 $1+t$, resp. $1-t$ zijn echter groter dan -1 , zodat de integraal wel
convergeert (voor $z \neq \pm 1$), de resultaten uit 3. blijven dan geldig).

Voor de functie $F(z)$ vinden we dus met (5.16)

$$F(z) = i \cos \pi \gamma (z+1)^{\frac{1}{2}-\gamma} (z-1)^{\frac{1}{2}+\gamma} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{t-z} \varphi(t) dt, \quad (5.20)$$

waarmee de oplossing van het op pag.16 geformuleerde probleem voor het
geval dat G een half vlak is gevonden is.

Opmerking. Men kan bewijzen (zie Muskhelishvili, [3], Ch.4) dat in
de omgeving van $z=1$ geldt $F(z) = -i \varphi(1) + F^*(z)$, waarin $F^*(z)$ tot nul
nadert als z tot 1 nadert. $F(z)$ is hier dus inderdaad begrensd en
continu, en de limietwaarde is in overeenstemming met hetgeen uit
(5.8) en (5.9) volgt. Iets dergelijks geldt in de omgeving van $z=-1$.

We beschouwen nu het algemene geval van een willekeurig gebied G .
Zij $w = f(z)$ de functie die het gebied G conform afbeeldt op het
halve vlak $\text{Im } w > 0$, zodanig dat het deel Γ_1 van de rand van G afge-
beeld wordt op het deel $(-1, +1)$ van de reële as van het w -vlak
(dat we Γ_1^* zullen noemen, het overige deel van de reële as van het
 w -vlak noemen we Γ_2^*).

Zij op Γ_1^* de functie $\varphi^*(w)$ gedefinieerd door

$$\varphi^*\{f(z)\} = \varphi(z). \quad (5.21)$$

Dan voldoet de functie

$$F^*(w) = i \cos \pi \gamma (w+1)^{\frac{1}{2}-\gamma} (w-1)^{\frac{1}{2}+\gamma} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{s-w} \varphi^*(s) ds \quad (5.22)$$

volgens het bovenstaande aan de volgende eisen:

- 1°. $F^*(w)$ is analytisch voor $\text{Im } w > 0$ en continu voor $\text{Im } w \geq 0$,
- 2°. langs Γ_1 geldt $\text{Re } F^*(w) - \lambda \text{Im } F^*(w) = \lambda \varphi^*(w)$,
 langs Γ_2 geldt $\text{Re } F^*(w) = 0$,
- 3°. $F^*(w)$ nadert tot een constante als $w \rightarrow \infty$.

Beschouwen we nu de functie

$$F(z) = F^*\{f(z)\}, \quad (5.23)$$

dan is duidelijk dat dit de gezochte functie is, die aan de eisen van pag. 16 voldoet.

Immers, door de in G analytische functie $w = f(z)$ wordt het gebied G afgebeeld op het gebied $\text{Im } w > 0$ en de randdelen Γ_1 , resp. Γ_2 van G op Γ_1^* , resp. Γ_2^* . $F(z)$ is dus analytisch in G en continu in $G + \Gamma$ (dank zij het feit dat $F(w)$ nadert tot een constante als $w \rightarrow \infty$ is $F(z)$ ook continu in het punt van Γ_2 dat in $w = \infty$ wordt afgebeeld).

Verder is duidelijk aan (5.9) voldaan, terwijl voor een punt z_0 van Γ_1 (waarbij het punt $w_0 = f(z_0)$ van Γ_1^* behoort) geldt

$$\begin{aligned} \text{Re } F(z_0) - \lambda \text{Im } F(z_0) &= \text{Re } F^*(w_0) - \lambda \text{Im } F^*(w_0) = \\ &= \lambda \varphi^*(w_0) = \lambda \varphi(z_0), \end{aligned}$$

dus ook aan (5.8) is voldaan.

Door (5.21), (5.22) en (5.23) is de oplossing van het op pag. 16 gestelde probleem dus geheel bepaald.

Het is mogelijk om in de integraal in (5.22) $s = f(t)$ te substitueren. De integratie loopt dan langs Γ_1 (in de bij G behorende positieve richting) en we vinden met (5.21) en (5.23)

$$\begin{aligned} F(z) &= i \cos \pi \gamma (f(z)+1)^{\frac{1}{2}-\gamma} (f(z)-1)^{\frac{1}{2}+\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{(1+f(t))^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-f(t))^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{f(t)-f(z)} \varphi(t) f'(t) dt \end{aligned} \quad (5.24)$$

Het gebruik van deze formule is echter niet altijd voordeliger dan dat van de formules (5.21), (5.22) en (5.23) omdat de integrand meestal ingewikkelder is dan die van (5.22).

Opmerking: Met behulp van de formule (3.14) van Plemelj kan direct aangetoond worden dat de functie $F(z)$ uit (5.24) voldoet aan de gestelde eisen ($f(z)$ is reëel op $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $f'(t)dt$ is reëel op Γ_1).

6. Rechthoekige zee, grenzend aan een veel diepere oceaan; homogeen windveld.

We beschouwen het geval dat het gebied G_1 een half vlak en G_2 een rechthoek is (zie fig. 6.1) en veronderstellen weer dat in G_1 de diepte groot is t.o.v. die in G_2 . We kunnen dit gebied (met $a = 4$) opvatten als model voor de Atlantische Oceaan met de Noordzee (vgl. TW 23, 10). Verder

nemen we aan dat het windveld homogeen is en voorgesteld wordt door (vgl. TW 23 (4.2))

$$U = 0, V = -A_1 x - A_2 y, \quad (6.1)$$

waarin A_1 en A_2 op de in TW 23, (4.3) aangegeven wijze met de componenten

van het windveld samenhangen. Tenslotte stellen we de eis dat voor $z \rightarrow \infty$ in G_1 geldt

$$\Omega_1(z) = i A_1 z + o(z^{-1}). \quad (6.2)$$

Deze eis is nodig om het probleem eenduidig oplosbaar te maken (vgl. TW 23, 7) en is zodanig gesteld dat, wanneer het gebied G_2 er niet was, (of de diepte nul zou hebben), de oplossing zou zijn $\Omega_1(z) = i A_1 z$, (in TW 23, 7. hebben we aangetoond dat dit de meest plausibele oplossing is voor het geval van een half vlak met homogeen windveld). De eis (6.2) zegt nu dat voor grote z deze "ongestoorde toestand" benaderd moet worden, ook als de zee wel aanwezig is (vgl. ook de inleiding van TW 23, 10).

We zullen dit probleem behandelen met de in 4. aangegeven methode.

We stellen dus $\epsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{1-\epsilon}$ en nemen aan dat $\epsilon \ll 1$ is. Verder stellen we

$$\begin{aligned} \Omega_1(z) &= \Omega_1^{(0)}(z) + \epsilon \Omega_1^{(1)}(z) + \epsilon^2 \Omega_1^{(2)}(z) + \dots, \\ \Omega_2(z) &= \Omega_2^{(0)}(z) + \epsilon \Omega_2^{(1)}(z) + \epsilon^2 \Omega_2^{(2)}(z) + \dots \end{aligned}$$

Voor $\Omega_1^{(0)}$ hebben we de randvoorwaarden (4.8a):

$$\Phi_1^{(0)} = 0 \text{ langs } \Gamma_1 + \Gamma_{12}$$

benevens de voorwaarde (6.2) die het gedrag in het oneindige bepaalt. Hieruit volgt direct

$$\Omega_1^{(0)}(z) = i A_1 z. \quad (6.3)$$

Voor $\Omega_2^{(0)}$ hebben we de randvoorwaarden (4.9a):

$$\Phi_2^{(0)} = 0 \text{ langs } \Gamma_2, \quad (6.4)$$

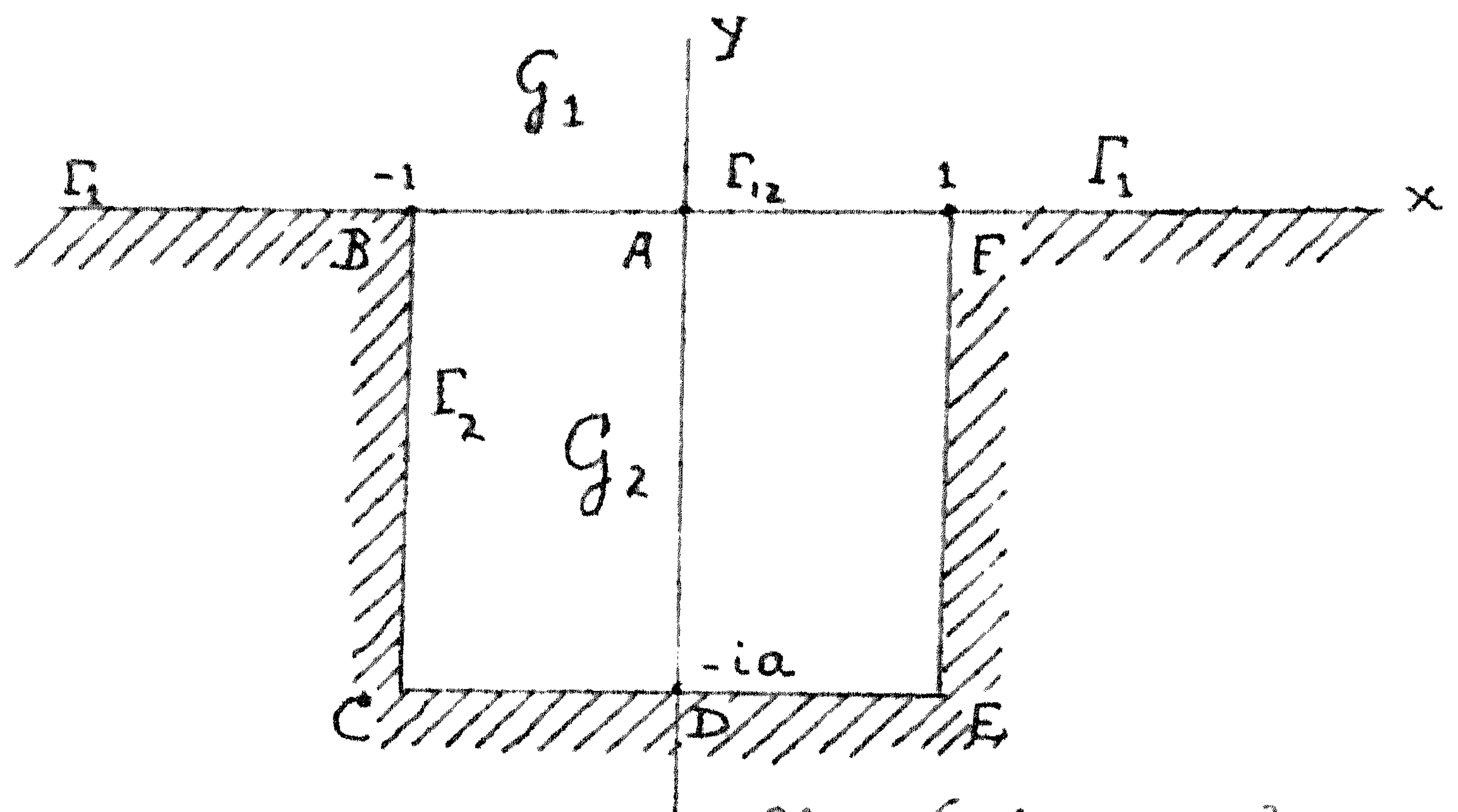


fig. 6.1 z-vlak

$$\Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \Psi_2^{(0)} = -\lambda_2' A_1 x \quad \text{langs } \Gamma_{12}. \quad (6.5)$$

En voor $\Omega_2^{(1)}$ hebben we de randvoorwaarde (4.9b), die we met (6.3) kunnen schrijven als

$$\Phi_2^{(1)} = 0 \quad \text{langs } \Gamma_2,$$

$$\Phi_2^{(1)} - \lambda_2' \Psi_2^{(1)} = \lambda_2' (A_1 x - A_1 x) = 0 \quad \text{langs } \Gamma_{12},$$

waaruit volgt $\Omega_2^{(1)} = 0$. We zien dus dat

$$\Omega_2(z) = \Omega_2^{(0)}(z) + \varepsilon^2 \Omega_2^{(2)}(z) + \dots,$$

waaruit volgt dat, als ε klein is,

$$\Omega_2(z) \approx \Omega_2^{(0)}(z) \quad (6.6)$$

een zeer goede benadering is.

Schrijven we ter afkorting $\Omega(z)$ voor $\Omega_2^{(0)}(z)$ en λ voor λ_2' , dan is dus te bepalen de functie $\Omega(z)$, analytisch in G_2 en continu in $G_2 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}$, die voldoet aan de volgende randvoorwaarden

$$\left. \begin{array}{ll} \text{langs } \Gamma_2: & \Phi = 0 \\ \text{langs } \Gamma_{12}: & \Phi - \lambda \Psi = -\lambda A_1 x = \lambda V(x, 0) \end{array} \right\} \quad (6.7)$$

Dit probleem is van het in 5. behandelde type.

Voor de oplossing moeten we eerst de functie $w = f(z)$ bepalen die het gebied G_2 conform afbeeldt op het halve vlak $\text{Im } w > 0$, zodanig dat Γ_{12} afgebeeld wordt op het interval $(-1, 1)$ van de reële as van het w -vlak. Aan deze eisen voldoet

$$w = f(z) = -\text{sn}(K(k)z, k), \quad (6.8)$$

waarin de functie $\text{sn}(u, k)$ de elliptische sinus amplitudinis van Jacobi met de modulus k en $K(k)$ de volledige elliptische integraal van de eerste soort met modulus k is; k moet bepaald worden uit

$$\frac{K(k')}{K(k)} = a, \quad (6.9)$$

waarin, zoals gebruikelijk, $k' = \sqrt{1-k^2}$.

De correspondentie tussen de verschillende bijzondere punten uit z - en w -vlak is in de figuren 6.1 en 6.2 aangegeven. In het volgende zullen we steeds

de modulus van de elliptische functies en integralen weglaten, en dus

schrijven $w = -\text{sn } Kz$,

$\frac{K}{K'} = a$, etc.

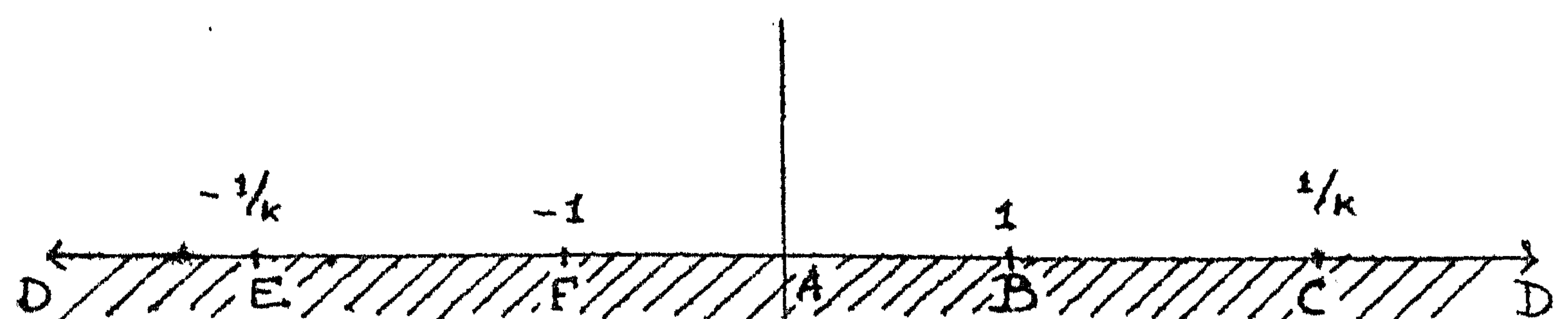


fig. 6.2 w -vlak

Met de in 5. afgeleide formule (5.24) kunnen we direct de gezochte functie $\Omega(z)$ bepalen:

$$\Omega(z) = -1 \cos \pi \gamma (f(z)+1)^{\frac{1}{2}-\gamma} (f(z)-1)^{\frac{1}{2}+\gamma} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+f(t))^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-f(t))^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{f(t)-f(z)} f'(t) v(t,0) dt, \quad (6.10)$$

waarin γ bepaald is door $\operatorname{ctg} \pi \gamma = \lambda$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ en $f(z)$ de afbeeldingsfunctie (6.8) is (het minteken ontstaat doordat in (5.24) de integratie moet geschieden in de bij G_2 behorende positieve richting).

We zullen ons nu beperken tot het geval $a = 4$ (vgl. TW 23, 10.). Uit (6.9) volgt dan dat k zeer klein moet zijn. Voor kleine k geldt

$$K(k) = \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4} k^2 + \dots),$$

$$K(k') = \ln(\frac{4}{k}) + \frac{1}{4} k^2 (\ln(\frac{4}{k}) - 1) + \dots$$

In eerste benadering volgt hier met (6.9) voor $a = 4$ uit

$$\ln(\frac{4}{k}) = 2\pi, \text{ dus } k = 4 e^{-2\pi} \approx 0,747 \cdot 10^{-2}$$

en dit antwoord blijft in zijn eerste drie cijfers onveranderd, wanneer men meer termen uit de reeksen in aanmerking neemt.

Nu geldt voor $|\operatorname{Im} z| < \frac{K'}{K}$ de reeks

$$\operatorname{sn} Kz = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin (2n+1) \frac{\pi}{2} z,$$

waarin $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$.

Op grond van (6.9) volgt hieruit dat voor reële t in zeer goede benadering geldt $q^{\frac{1}{2}} = e^{-2\pi} \approx \frac{1}{4} k$ en, daar $K \approx \frac{\pi}{2}$

$$f(t) = -\operatorname{sn} Kt \approx -\sin \frac{\pi}{2} t. \quad (6.11)$$

Een verdere vereenvoudiging krijgen we, wanneer we de functie $\Omega(z)$ slechts willen kennen in de omgeving van de "zuidkust" van de zee (de lijn CDE). Stellen we

$$z = -4i + x,$$

dan geldt

$$f(z) = -\operatorname{sn} K(-4i+x) = -\operatorname{sn} (Kx - iK') = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn} Kx} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x}.$$

Als z op de lijn CDE ligt dan geldt dus

$$|f(z)| \geq \frac{1}{k} \approx 134$$

en ook in een omgeving van de zuidkust (bv. voor $\text{Im } z < -3$) is $|f(z)|$ nog zeer groot.

We maken dus slechts een geringe fout, wanneer we in (6.10) $f(z)$ naar oneindig laten gaan. Vullen we tevens (6.11) in, dan vinden we

$$\begin{aligned}\Omega(z) &\approx i \cos \pi \gamma \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+f(t))^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1-f(t))^{-\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) V(t,0) dt \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \cos \pi \gamma \int_{-1}^1 (1 - \sin \frac{\pi}{2} t)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (1 + \sin \frac{\pi}{2} t)^{-\frac{1}{2}-\gamma} \cos \frac{\pi}{2} t V(t,0) dt,\end{aligned}$$

waaruit we na enige herleiding vinden

$$\Omega(z) \approx -\frac{1}{2} \cos \pi \gamma \int_0^1 \left\{ \left(\tan \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\gamma} \cdot V(-1+t,0) + \left(\tan \frac{\pi}{4} t \right)^{2\gamma} V(1-t,0) \right\} dt \quad (6.12)$$

Met $V(t,0) = -A_1 t$ vinden we dus dat in de omgeving van de Zuidkust geldt

$$\Omega_2(z) \approx \Omega(z) \approx -1 A_1 I_1(\gamma), \quad (6.13)$$

$$\text{waarin } I_1(\gamma) = \frac{1}{2} \cos \pi \gamma \int_0^1 \left[\left(\tan \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\gamma} - \left(\tan \frac{\pi}{4} t \right)^{2\gamma} \right] (1-t) dt. \quad (6.14)$$

Voor het windeffect ζ volgt hieruit met (2.8) en (6.1)

$$\zeta(x,y) \approx \lambda (A_1 x + A_2 y + A_1 I_1(\gamma))$$

en daar A_1 en A_2 volgens TW 23 (4.3) samenhangen met de componenten W_1 en W_2 van het windveld, kunnen we ook schrijven (daar $\lambda_2 = \frac{D}{4\pi H_2}$)

$$\zeta(x,y) = \frac{W_1}{\rho g H_2} (x + I_1(\gamma)) + \frac{W_2 y}{\rho g H_2}, \quad (6.15)$$

waarin $I_1(\gamma)$ op de boven beschreven wijze bepaald is door de grootheid $\lambda = \lambda_2' = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1}$; H_2 is de diepte van de zee.

Natuurlijk geldt (6.15) alleen in de omgeving van de Zuidkust.

Door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum is de functie $I_1(\gamma)$ voor enkele waarden van γ berekend. Gevonden werd

$\gamma = 0,5$	$\lambda = \text{ctg} \pi \gamma = 0$	$I_1(\gamma) = 1$
0.48	0.063	0.947
0.46	0.126	0.895
0.44	0.191	0.845
0.42	0.257	0.797

We merken op dat de functie $I_1(\gamma)$ (en daarmee $\zeta(x,y)$) niet erg kritisch van de waarde van λ afhangt.

Nemen we als voorbeeld

$H_1 = 1000$ m (diepte van de oceaan),

$H_2 = 65$ m (harmonisch gemiddelde diepte van de Noordzee) ¹²⁾

$D = 150$ m (vgl. Schalkwijk, [2], p.21),

dan vinden we $\lambda_1 = 0,012$, $\lambda_2 = 0,184$, $\varepsilon = 0,065$ ¹³⁾,
 $\lambda = \lambda_2' = 0,197$.

Bij deze waarde van λ vinden we door grafische interpolatie
 $I_1(\gamma) = 0,842$.

We krijgen dan, als we bovendien een schaal factor $\frac{1}{2} L$ in aanmerking nemen (zodat de breedte van de zee L en niet 2 is)

$$\zeta(x,y) = \frac{W_1 L}{2 \rho g H_2} (x + 0,84) + \frac{W_2 L y}{2 \rho g H_2} \quad (6.19)$$

(x en y zijn hierbij nog wel in relatieve maat uitgedrukt).

En speciaal voor het punt $x = 0$, $y = -4$ (het punt "Hoek van Holland") vinden we

$$\zeta = \frac{L}{2 \rho g H_2} (0,84 W_1 - 4 W_2) \quad (6.20)$$

Stellen we nog $W_1 = W \sin \psi$, $W_2 = -W \cos \psi$ (ψ is dus nul wanneer de wind loodrecht op de "zuidkust" gericht is en wordt positief als de wind "krimpt"), dan kunnen we voor (6.20) ook schrijven

$$\zeta = 4,1 \frac{WL}{2 \rho g H_2} \cos (\psi - 12^\circ) \quad (6.21)$$

Het resultaat (6.20) kunnen we vergelijken met het resultaat (10.21) uit TW 23, dat berekend is onder de aanname dat de oceaan even diep is als de zee. Het verschil (afgezien van de factor $\frac{1}{2} L$) is de term $0,84 \frac{W_1 L}{2 \rho g H_2}$.

Tengevolge van het diepte-verschil tussen oceaan en zee is er dus een windeffect tengevolge van de windcomponent loodrecht op de as van de baai bijgekomen.

We kunnen (6.20) en (6.21) ook vergelijken met het resultaat dat Schalkwijk ([2], p.30) afleidt onder de aanname dat de zee een gelijkmatig hellende bodem heeft. Herleiden we zijn uitkomst (die op een enigszins onduidelijke manier met een benaderingsmethode verkregen is) tot onze vorm (voor zijn grootheid H_0 neemt hij 40 m, terwijl bij ons $H_2 = 65$ m), dan luidt deze

 12) Daar in de grootheid λ de diepte in de noemer optreedt, is het plausibel om te werken met het harmonisch gemiddelde van de diepte.

13) Bij deze waarden van H_1 , H_2 en D is ε dus inderdaad klein, zodat onze benaderingen zeer goed zijn.

$$\zeta = \frac{L}{2\rho g H_2} (1.1 W_1 - 4.3 W_2) = 4.4 \frac{WL}{2\rho g H_2} \cos(\psi - 14^\circ).$$

De overeenkomst is, hoewel de uitgangspunten van de berekening geheel verschillend zijn, opvallend.

7. Lineair varierend windveld boven een rechthoekige zee, grenzend aan een diepe oceaan.

We beschouwen hetzelfde gebied (vgl. fig.6.1) als in de vorige paragraaf, doch nemen aan dat de componenten van het windveld niet constant, doch lineaire functies van x en y zijn.

We noemen de componenten van het windveld in het vervolg W_x en W_y en stellen

$$\begin{aligned} W_x &= W_1 + W_{11} x + W_{12} (y+2) \\ W_y &= W_2 + W_{21} x + W_{22} (y+2) \end{aligned} \quad (7.1)$$

W_1 en W_2 zijn dus de gemiddelde waarden van de windcomponenten W_x en W_y . We bepalen eerst de bij (7.1) behorende windpotentialen.

Stellen we $W_1 = \frac{\rho g D}{4\pi} A_1$ etc. (vgl. TW 23, (4.3)), dan moet volgens (2.4)

$$-\text{rot } \vec{k} U - \text{grad } V = (A_1 + A_{11}x + A_{12}(y+2), A_2 + A_{21}x + A_{22}(y+2)) \quad (7.2)$$

Toepassing van de operator $\vec{k}.\text{rot}$ op deze vergelijking levert (vgl. de rekenregels in appendix 1 van TW 23)

$$\Delta U = A_{21} - A_{12}.$$

We kunnen hieraan voldoen door te kiezen

$$U = -\frac{1}{2} (A_{21} - A_{12})(1-x^2) \quad (7.3)$$

en dan volgt uit (7.2)

$$-\text{grad } V = (A_1 + A_{11}x + A_{12}(y+2), A_2 + A_{12}x + A_{22}(y+2)),$$

waaraan voldaan wordt door

$$V = -(A_1 + 2A_{12})x - (A_2 + 2A_{22})y - \frac{1}{2} A_{11}x^2 - A_{12}xy - \frac{1}{2} A_{22}y^2. \quad (7.4)$$

De windpotentialen (7.3) en (7.4) zijn echter niet de enige, die het windveld (7.1) voortbrengen, we kunnen bij de functie $U(x,y) + iV(x,y)$ nog een willekeurige analytische functie $\Lambda(z)$ van $z=x+iy$ optellen (vgl. lemma 3 in TW 23). We willen deze functie zo bepalen dat voor de functie $U^*(x,y) = U + \text{Re } \Lambda$ geldt $U^* = 0$ op de gehele rand van G .

Hiertoe ontwikkelen we eerst $U(x)$ in een Fourier-reeks:

$$U(x) = - \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \cos(n+\frac{1}{2}) \pi x.$$

Beschouw nu de functie

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \frac{\cos(n+\frac{1}{2}) \pi (z+2i)}{\operatorname{ch}(2n+1) \pi} = \\ &= \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \frac{\operatorname{ch}(n+\frac{1}{2}) \pi (y+2) \cos(n+\frac{1}{2}) \pi x - \operatorname{sh}(n+\frac{1}{2}) \pi (y+2) \sin(n+\frac{1}{2}) \pi x}{\operatorname{ch}(2n+1) \pi}.$$

Deze functie heeft de volgende eigenschappen

1°. $\Lambda(z)$ is in G een analytische functie van z (de reeks convergeert hier uniform; daar hier, zoals gemakkelijk te verifiëren is $|\cos(n+\frac{1}{2}) \pi (z+2i)| \leq \operatorname{ch}(2n+1) \pi$).

2°. $\operatorname{Re} \Lambda(\pm 1 + iy) = 0$ voor $-4 \leq y \leq 0$.

$$\begin{aligned} 3°. \operatorname{Re} \Lambda(x) &= \operatorname{Re} \Lambda(x-4i) = \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \cos(n+\frac{1}{2}) \pi x = \\ &= -U(x) \quad \text{voor } -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

En daar voor $z = \pm 1 + iy$, $-4 \leq y \leq 0$ $U = 0$ is, geldt: $U + \operatorname{Re} \Lambda = 0$ langs de gehele rand van G .

Nemen we dus als windpotentialen

$$\begin{aligned} U^*(x, y) &= U + \operatorname{Re} \Lambda = \\ &= -\frac{1}{2} (A_{21} - A_{12}) (1-x^2) + \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \frac{\operatorname{ch}(n+\frac{1}{2}) \pi (y+2) \cdot \cos(n+\frac{1}{2}) \pi x}{\operatorname{ch}(2n+1) \pi}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} V^*(x, y) &= V + \operatorname{Im} \Lambda = \\ &= -(A_1 + 2A_{12})x - (A_2 + 2A_{22})y - \frac{1}{2} A_{11} x^2 - A_{12} xy - \frac{1}{2} A_{22} y^2 + \\ &\quad - \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}(n+\frac{1}{2}) \pi (y+2) \cdot \sin(n+\frac{1}{2}) \pi x}{\operatorname{ch}(2n+1) \pi}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

dan wordt ook hierdoor het windveld (7.1) voorgesteld, terwijl $U^*(x, y) = 0$ langs de hele rand van G .

Met het oog op het volgende merken we nog op dat uit (7.5) volgt

$$V^*(x,0) = - (A_1 + 2A_{12})x - \frac{1}{2} A_{11} x^2 - (A_{21} - A_{12})\varphi(x), \quad (7.6)$$

$$V^*(x,-4) = - (A_1 - 2A_{12})x + 4 A_2 - \frac{1}{2} A_{11} x^2 + (A_{21} - A_{12})\varphi(x), \quad (7.7)$$

waarin

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \operatorname{tgh} (2n+1)\pi \cdot \sin(n+\frac{1}{2})\pi x. \quad (7.8)$$

Enkele formules die de berekening van deze functie $\varphi(x)$ vergemakkelijken zijn in appendix 3 vermeld.

We willen nu de opwaaiing $\Delta(x,y)$ bepalen die behoort bij het windveld (7.1), waarbij we ons tevreden zullen stellen met de in 4. aangegeven nulde benadering (die reeds een goede benadering is als de oceaan zeer diep is ten opzichte van de zee).

Volgens (4.8a) en (4.9a) hebben we in nulde benadering voor de complexe potentiaal in het gebied van de zee de randvoorwaarden

$$\Phi = -U \text{ langs } \Gamma_2 \text{ (vgl. fig. 6.1)}$$

$$\Phi - \lambda \Psi = -U + \lambda V, \text{ langs } \Gamma_{12}$$

$$\text{waarin } \lambda = \frac{\lambda_2}{1-\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Kiezen we nu de functies U^* en V^* uit (7.4) en (7.5) als windpotentialen, dan krijgen we, dank zij de eigenschappen van U^* dat de in G analytische functie $\Omega(z) = \Phi + i\Psi$ moet voldoen aan

$$\Phi = 0 \text{ langs } \Gamma_2 \quad (7.9)$$

$$\Phi - \lambda \Psi = \lambda V^* \text{ langs } \Gamma_{12}. \quad (7.10)$$

Dit probleem is in de vorige paragraaf reeds behandeld (vgl. de randvoorwaarden (6.7)).

Als resultaat vinden we dat langs de "zuidkust" geldt

$$\Omega(z) \approx -\frac{i}{2} \cos \pi \gamma \int_0^1 \left[(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t)^{-2\gamma} V^*(-1+t,0) + (\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t)^{2\gamma} V^*(1-t,0) \right] dt$$

$$(\operatorname{ctg} \pi \gamma = \lambda; 0 < \gamma < \frac{1}{2}).$$

Met (7.6) vinden we hieruit

$$\Omega(z) \approx -i \left[(A_1 + 2 A_{12}) I_1(\gamma) - \frac{1}{2} A_{11} I_2(\gamma) + (A_{21} - A_{12}) I_3(\gamma) \right], \quad (7.11)$$

waarin $I_1(\gamma)$ door (6.14), en $I_2(\gamma)$ en $I_3(\gamma)$ door

$$I_2(\gamma) = \frac{1}{2} \cos \pi \gamma \int_0^1 \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\gamma} + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\gamma} \right] (1-t)^2 dt$$

$$I_3(\gamma) = \frac{1}{2} \cos \pi \gamma \int_0^1 \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\gamma} - \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\gamma} \right] \varphi(1-t) dt$$

gegeven zijn.

Door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum is de functie $\varphi(x)$ getabelleerd en zijn de integralen $I_2(\gamma)$ en $I_3(\gamma)$ berekend voor $\gamma = 0,44$ (vgl. pag. 23, $\lambda = 0,191$).

Gevonden werd:

$x =$	0	$\varphi(x) =$	0	$x = 0,6$	$\varphi(x) = 0,407$
	0,1		0,074	0,7	0,457
	0,2		0,147	0,8	0,497
	0,3		0,218	0,9	0,526
	0,4		0,286	1,0	0,541
	0,5		0,349		

en $I_2(0,44) = 0,819$, $I_3(0,44) = 0,472$.

Hiermee vinden we

$$\Omega(z) \approx -i \left[0,84 (A_1 + 2 A_{12}) - 0,41 A_{11} + 0,47 (A_{21} - A_{12}) \right], \quad (7.12)$$

geldig in het "zuidelijke" deel van de zee.

Met behulp van (2.7) vinden we uit (7.7) en (7.12) dat voor de opwaaiing langs de Zuidkust geldt (onder gebruikmaking van

$\lambda_2 = \frac{D}{4\pi H_2}$ en wanneer ook nog de schaaalfactor $\frac{1}{2} L$ wordt toegevoegd)

$$\zeta = -\lambda_2 (V + \operatorname{Im} \Omega) =$$

$$= \frac{L}{2\rho g H_2} \left[(0,84+x)W_1 - 4 W_2 - (0,41 - \frac{1}{2} x^2)W_{11} + \right. \\ \left. + (1,21 - 2x + \varphi(x))W_{12} + (0,47 - \varphi(x))W_{21} \right]. \quad (7.13)$$

Speciaal vinden we voor $x = 0$ ("Hoek van Holland")

$$\zeta = \frac{L}{2\rho g H_2} \left[0,84 W_1 - 4 W_2 - 0,41 W_{11} + 1,21 W_{12} + 0,47 W_{21} \right] = \\ = \frac{L}{2\rho g H_2} \left[-4 W_2 + 0,84(W_1 + 2 W_{12}) - 0,41 W_{11} + 0,47(W_{21} - W_{12}) \right]. \quad (7.14)$$

In deze laatste vorm hebben alle termen een min of meer aanschouwelijke betekenis.

De term $-4 W_2$ is de belangrijkste, afkomstig van de gemiddelde windcomponent in de y-richting. Het valt op dat er geen term met W_{22} voorkomt - voor de opwaaiing tengevolge van de winden in de y-richting is de variatie van de windsterkte in de y-richting niet van belang.

De termen $0,84 (W_1 + 2 W_{12}) - 0,41 W_{11}$ zijn een gevolg van winden in de x-richting in de omgeving van de grens met de oceaan (voor $y = 0$ geldt $W_x = W_1 + 2 W_{12} + W_{11} x$). Vergelijk ook formule (6.20), waarin een term $0,84 W_1$ voorkomt. Thans blijkt dat speciaal de x-component in de omgeving van de oceaandrond de extra-term veroorzaakt, niet bv. de gemiddelde windsterkte in de x-richting (W_1). De term $-0,41 W_{11}$ treedt op omdat W_x langs de oceaandrond nog van x afhangt.

De term $0,47 (W_{21} - W_{12})$ tenslotte is een gevolg van de rotatie van het windveld ($\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} = W_{21} - W_{12}$). Bij positieve rotatie wordt een extra opwaaiing veroorzaakt.

Bij de beschouwing van de windvelden die optreden bij ernstige N.W. stormen, vallen twee bijzonderheden vaak op:

a) In het algemeen is de windsterkte in het Westelijk deel van de Noordzee veel groter dan in het Oostelijk deel (waar zich ongeveer de kern van de depressie bevindt). Dit betekent dat de grootheid W_{21} een vrij grote positieve waarde kan hebben (de component W_y is negatief maar neemt met toenemende x toe (in algebraïsche zin)).

b) Vaak gebeurt het dat de x-component van het windveld in de Noordelijke helft van de Noordzee praktisch nul is, doch een positieve waarde heeft in het Zuidelijk deel van de Noordzee. Dit betekent dat $W_1 + 2 W_{12}$ praktisch nul is, doch dat W_{12} negatief is (W_x neemt bij afnemende y toe).

Het is duidelijk dat beide effecten volgens (7.14) een vergrotende invloed hebben op de waarde van ζ in het punt "Hoek van Holland".

Als voorbeeld beschouwen we eerst het windveld $W_x = 0$, $W_y = -W + Wx$.

De wind is dus overal langs de as gericht doch de sterkte is nul langs de oostkust en langs de westkust is de sterkte het dubbele van de gemiddelde waarde W.

Uit (7.14) vinden we dan, met $W_1 = W_{11} = W_{12} = 0$; $W_2 = -W$, $W_{21} = W$, $W_{22} = 0$

$$\zeta = \frac{LW}{2 \rho g H_2} [4 + 0,47]$$

dus, vergeleken bij wat we volgens (6.20) (voor "Hoek van Holland") zouden vinden voor het gemiddelde windveld, een verhoging van 12%.

Als tweede voorbeeld beschouwen we het windveld

$$W_x = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4} Wx - \frac{1}{4} W(y+2)$$

$$W_y = -W + \frac{5}{4} Wx$$

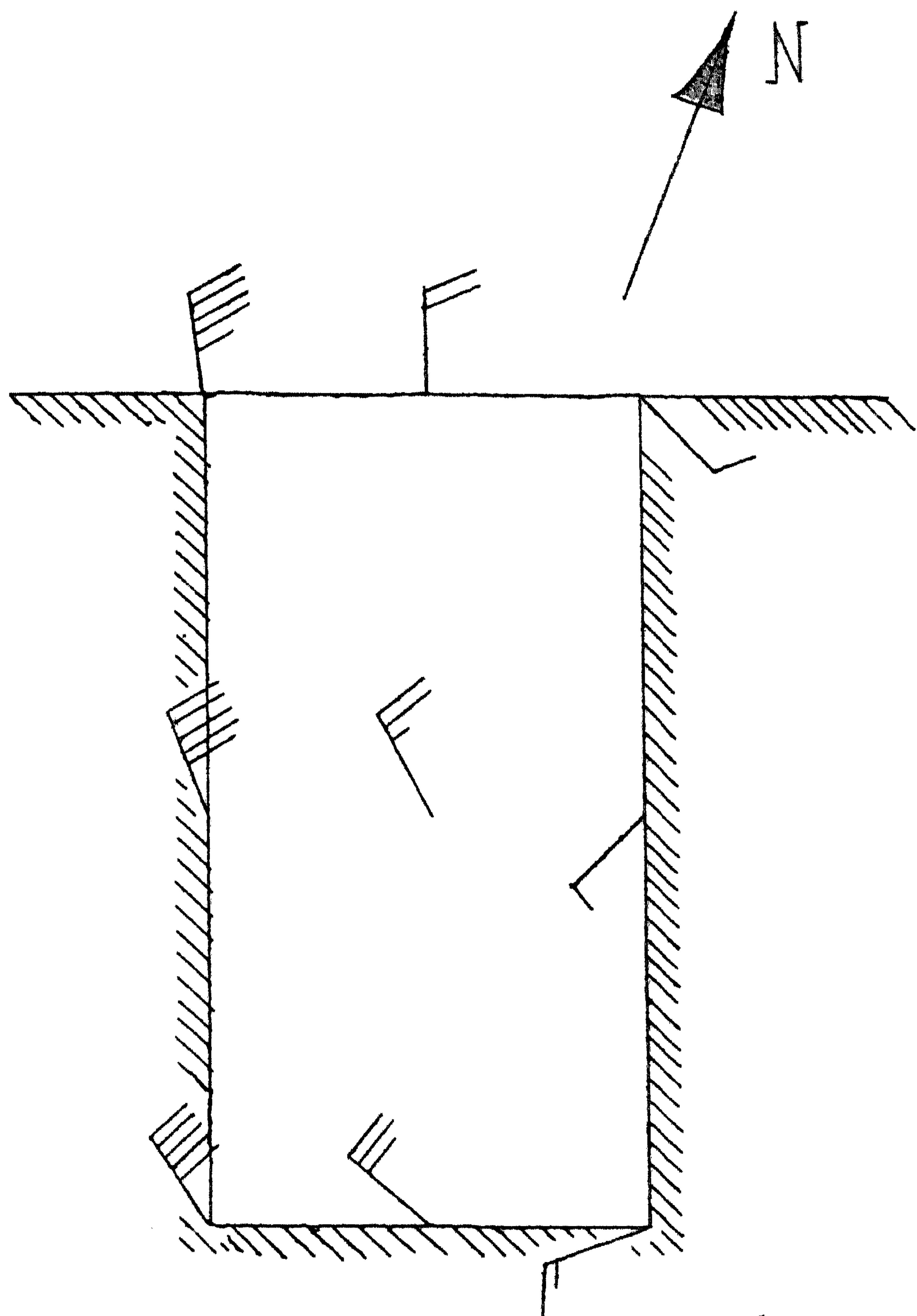


fig 7.1

$$= \frac{1}{2} W$$

In figuur 7.1 is een schets van dit windveld gegeven (N.b. we beschouwen steeds windkrachten en geen windsterkten, in fig. 7.1 is dan ook de grootte van de windkracht - die ruwweg evenredig is met het kwadraat van de windsterkte - aangegeven).

We vinden uit (7.14)

$$C = \frac{L}{2 \rho g H_2} [4 + 0,10 + 0,71],$$

terwijl we, als we met het gemiddelde windveld zouden rekenen, volgens (6.20)

$$C = \frac{L}{2 \rho g H_2} [4 + 0,42]$$

zouden krijgen. Het extra-effect is hier dus 9%.

Appendix 1.

We bewijzen eerst de volgende hulpstelling:

Zij G een gebied van het in 2. beschouwde type. In ieder der afgesloten gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$) zij een vector-veld $\vec{u}_j(x, y)$ gedefinieerd dat aan de volgende eisen voldoet

- 1°. $\vec{u}_j$ is continu in $G_j + \Gamma^{(j)}$,
- 2°. langs het gemeenschappelijke deel Γ_{jk} ($j, k=1, \dots, n$) van $\Gamma^{(j)}$ en $\Gamma^{(k)}$ is de tangentiële component van $\vec{u}_j$ gelijk aan die van $\vec{u}_k$.

Dan geldt

$$\sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma^{(j)}} \vec{u}_j \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \vec{u}_j \cdot d\vec{s} \quad (A1.1)$$

(Γ_j is dat deel van $\Gamma^{(j)}$ dat samenvalt met de rand Γ van G , de integratierichting langs Γ_j is die, behorende bij Γ).

Bewijs:

We splitsen in het linkerlid van (A1.1) $\Gamma^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$) in stukken $\Gamma_j, \Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{jn}$ (voor zover aanwezig). De integralen langs de delen Γ_j leveren juist het rechterlid van (A1.1) (met de goede integratie-richtingen). Verder komt iedere kromme $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$ ($j, k=1, \dots, n$) bij deze splitsing tweemaal voor, een maal als deel van $\Gamma^{(j)}$ en een maal als deel van $\Gamma^{(k)}$. Bij de integratie langs $\Gamma^{(j)}$ resp. $\Gamma^{(k)}$ wordt Γ_{jk} echter in verschillende zin doorlopen en daar langs Γ_{jk} de tangentiële componenten van $\vec{u}_j$ en $\vec{u}_k$ gelijk zijn, vallen de integralen langs de krommen Γ_{jk} tegen elkaar weg.

Vervolgens bewijzen we de in 2. genoemde stelling, die we echter in een iets algemenere vorm zullen uitspreken.

Stelling.

Zij G een gebied van het in 2. beschouwde type. In ieder van de afgesloten gebieden $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$) zijn vectorvelden $\vec{u}_j(x, y)$, resp. $\vec{v}_j(x, y)$ gedefinieerd die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- 1°. $\vec{u}_j$, resp. $\vec{v}_j$ is continu in $G_j + \Gamma^{(j)}$,
- 2°. $\vec{u}_j$, resp. $\vec{v}_j$ is continu differentieerbaar in G_j en hier geldt $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u}_j = 0$, resp. $\text{div } \vec{v}_j = 0$, (A1.2)
- 3°. langs het gemeenschappelijke deel Γ_j van $\Gamma^{(j)}$ en Γ is de tangentiële component, resp. normale component van $\vec{u}_j$ resp. $\vec{v}_j$ nul,

- 4°. langs het gemeenschappelijke deel Γ_{jk} ($j, k=1, \dots, n$) van $\Gamma^{(j)}$ en $\Gamma^{(k)}$ is de tangentiële component, resp. normale component van $\vec{u}_j$, resp. $\vec{v}_j$ gelijk aan die van $\vec{u}_k$ resp. $\vec{v}_k$.

Dan is er een op een additieve constante na eenduidig bepaald scalarveld $\psi(x, y)$ resp. $\varphi(x, y)$ met de volgende eigenschappen:

- 1°. ψ , resp. φ is continu en eenwaardig in $G + \Gamma$,
 2°. ψ , resp. φ is continu differentieerbaar in $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$) (op $\Gamma^{(j)}$ moet in inwendige richting gedifferentieerd worden) en hier geldt

$$\vec{u}_j = - \text{grad} \psi, \text{ resp. } \vec{v}_j = - \text{rot } \vec{k} \varphi. \quad (\text{A1.3})$$

Bewijs:

We bewijzen deze stelling alleen voor het eerste geval (de velden $\vec{u}_j$ en ψ) het tweede geval volgt direct hieruit indien $\vec{u}_j$ vervangen wordt $\vec{k} \times \vec{v}_j$ en ψ door φ .

Zij het veld $\vec{u}(x, y)$ gedefinieerd door

$$\vec{u} = \vec{u}_j \text{ in } G_j + \Gamma^{(j)} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Op de krommen Γ_{jk} is $\vec{u}$ hierdoor in het algemeen niet eenduidig gedefinieerd, de tangentiële component van $\vec{u}$ is dat echter wel, dank zij de voorwaarde 4°.

Zij de functie $\psi(x, y)$ in $G + \Gamma$ gedefinieerd door

$$\psi(x, y) = - \int_C \vec{u} \cdot d\vec{s}, \quad (\text{A1.4})$$

waarin C een geheel in $G + \Gamma$ verlopende kromme is die een (willekeurig gekozen) vast punt in $G + \Gamma$ verbindt met het punt (x, y) , zodanig dat C ieder der krommen Γ_{jk} hoogstens eindig vaak snijdt (C mag wel gedeeltelijk met delen van de krommen Γ_{jk} samenvallen - de tangentiële component van $\vec{u}$ is hier eenduidig bepaald, dus de onbepaaldheid in $\vec{u}$ langs Γ_{jk} heeft geen invloed op de uitkomst van de integraal in (A1.4)).

De aldus gedefinieerde functie $\psi(x, y)$ is zeker continu in $G + \Gamma$ en voldoet ook zeker aan (A1.3), ook in punten van de krommen Γ_{jk} , mits aan de goede zijde van Γ_{jk} gedifferentieerd wordt.

Om te bewijzen dat ψ eenwaardig is in $G + \Gamma$ is het voldoende om te bewijzen, dat als C een gesloten kromme is die geheel in $G + \Gamma$ verloopt en ieder der krommen Γ_{jk} hoogstens eindig vaak snijdt, geldt

$$\int_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Het deel G' van G dat binnen C ligt is van hetzelfde type als G en heeft tot rand C benevens het deel Γ' van Γ dat binnen C ligt (als G enkelvoudig samenhangend is, dan is Γ' er niet). Noemen we het deel van G_j ($j = 1, \dots, n$) dat binnen C ligt (indien aanwezig) G_j' ¹⁴⁾ en de rand van G_j' $\Gamma^{(j) '}$, dan geldt volgens de bovengenoemde hulpstelling (A1.1)

$$\int_C \vec{u} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma'} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma^{(j) '}} \vec{u}_j \cdot d\vec{s}.$$

Nu is $\int_{\Gamma'} \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0$, omdat de tangentiële component van $\vec{u}$ nul is op Γ . En volgens het theorema van Stokes (dat ook voor meervoudig samenhangende gebieden geldt, mits $\vec{u}$ eenwaardig is) is

$$\oint_{\Gamma^{(j) '}} \vec{u}_j \cdot d\vec{s} = \iint_{G_j'} \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u}_j \, d\sigma = 0,$$

daar $\vec{u}_j$ zeker continu is in $G_j' + \Gamma^{(j) '}$, continu differentieerbaar is in G_j' en in G_j' aan (A1.2) voldoet.

Dus $\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0$, waarmee de eenwaardigheid van de door (A1.4) gedefiniëerde functie $\psi(x, y)$ bewezen is.

Dat de velden ψ die aan alle eisen voldoen op een additieve constante na eenduidig bepaald zijn, volgt direct uit het feit dat het verschil van twee dergelijke velden een in $G + \Gamma$ continu veld is, waarvan de gradient in alle deelgebieden G_1 nul is.

Appendix 2.

We beginnen met het bewijs van een formule van het type van de formules van Green:

Zij G^* een enkelvoudig of meervoudig samenhangend gebied van het beschouwde type ("eindig veel eilanden") met rand Γ^* . Zij de complexe functie

$$\Omega^* = \Phi^*(x, y) + i \Psi^*(x, y)$$

in $G^* + \Gamma^*$ continu en eenwaardig en in G^* een analytische functie van $z = x + iy$, zodanig dat $\text{grad } \Phi^*$ continu is in $G^* + \Gamma^*$.

Dan geldt

$$\iint_{G^*} (\text{grad } \Phi^*)^2 d\sigma = \iint_{G^*} (\text{grad } \Psi^*)^2 d\sigma = - \oint_{\Gamma^*} \Psi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial s} ds \quad (\text{A2.1})$$

indien de integratieweg langs Γ^* positief georiënteerd is.

14) Het gebied G_j' kan uit meerdere, niet samenhangende delen bestaan. Daar C de kromme Γ_{jk} en dus ook $\Gamma^{(j) '}$ slechts hoogstens eindig vaak snijdt is het aantal delen, waarin G_j' eventueel uiteenvalt, zeker eindig.

Bewijs: Volgens het theorema van Stokes geldt voor een vectorveld $\vec{u}$ dat in $G^* + \Gamma^*$ continu en eenwaardig en in G^* continu differentieerbaar is

$$\iiint_{G^*} \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} \, d\Omega = \oint_{C^*} \vec{u} \cdot d\vec{s}.$$

Kies $\vec{u} = -\Psi^* \text{grad } \Phi^*$.

Dan is in G^*

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} &= -\vec{k} \cdot (\text{grad } \Psi^* \times \text{grad } \Phi^*) - \vec{k} \cdot \Psi^* \cdot \text{rot grad } \Phi^* = \\ &= -\text{grad } \Phi^* \cdot (\vec{k} \times \text{grad } \Psi^*) . \end{aligned}$$

Daar volgens lemma 2 uit TW 23 (de vergelijkingen van Cauchy-Riemann) geldt: $\text{grad } \Psi^* = -\text{rot } \vec{k} \Phi^* = \vec{k} \times \text{grad } \Phi^*$, volgt hieruit

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} = (\text{grad } \Phi^*)^2 = (\text{grad } \Psi^*)^2$$

Hieruit volgt direct (A.2.1).

We bewijzen nu dat de in 2. ingevoerde complexe potentialen $\Omega_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) door de eis dat $\Omega_j(z)$ in $G_j + \Gamma^{(j)}$ continu en in G_j analytisch is en door de overgangs- en randvoorwaarden (2.8), (2.9) en (2.10) eenduidig bepaald zijn op additieve constanten c_j na, die aan (2.11) voldoen.

Zij $\{\Omega_j^{(1)}(z)\}$ en $\{\Omega_j^{(2)}(z)\}$ twee stellen complexe potentialen die aan de bovengenoemde eisen voldoen. De verschil-functies

$$\Omega_j^*(z) = \Phi_j^*(x, y) + i \Psi_j^*(x, y) = \Omega_j^{(1)}(z) - \Omega_2^{(1)}(z) \quad (j=1, \dots, n)$$

zijn dan ook continu in $G_j + \Gamma^{(j)}$ en analytisch in G_j en voldoen aan de bij (2.8), (2.9) en (2.10) behorende homogene overgangs- en randvoorwaarden:

$$\text{langs } \Gamma_{jk} \quad (j, k=1, \dots, n) \text{ geldt: } \Phi_j^* - \lambda_j \Psi_j^* = \Phi_k^* - \lambda_k \Psi_k^*, \quad (\text{A2.2})$$

$$\lambda_j^{-1} \Phi_j^* = \lambda_k^{-1} \Phi_k^* \quad (\text{A2.3})$$

$$\text{langs } \Gamma_j \quad (j = 1, \dots, n) \text{ geldt } \Phi_j^* = \text{const.} \quad (\text{A2.4})$$

Passen we nu de formule (A2.1) toe op de gebieden G_j en de functies $\Omega_j^*(z)$ ($j = 1, \dots, n$) dan vinden we bij sommatie

$$I = \sum_{j=1}^n \iint_{G_j} (\text{grad } \Phi_j^*)^2 \, d\Omega = - \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma^{(j)}} \Psi_j^* \text{grad } \Phi_j^* \cdot d\vec{s}. \quad (\text{A2.5})$$

We zullen nu aantonen dat het rechterlid van (A2.5) nul is. Hiertoe schrijven we

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma^{(j)}} \{ \lambda_j \Psi_j^* - \Phi_j^* \} \text{grad } \lambda_j^{-1} \Phi_j^* \cdot d\vec{s} + \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \oint_{\Gamma^{(j)}} \Phi_j^* \text{grad } \Phi_j^* \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

We passen de hulpstelling (A1.1) uit appendix 1 toe op de in $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$) gedefinieerde vectorvelden ¹⁵⁾

$$\vec{u}_j = (\lambda_j \Psi_j^* - \Phi_j^*) \text{grad } \lambda_j^{-1} \Phi_j^*.$$

Volgens (A2.2) en (A2.3) is langs de krommen Γ_{jk} ($j, k=1, \dots, n$) de tangentiële component van $\vec{u}_j$ gelijk aan die van $\vec{u}_k$ (uit (A2.3) volgt door differentiatie dat $\lambda_j^{-1} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial s} = \lambda_k^{-1} \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial s}$). En volgens (A1.1) is dus

$$\sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma^{(j)}} \{ \lambda_j \Psi_j^* - \Phi_j^* \} \text{grad } \lambda_j^{-1} \Phi_j^* \cdot d\vec{s} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \int_{\Gamma_j} \{ \lambda_j \Psi_j^* - \Phi_j^* \} \text{grad } \Phi_j^* \cdot d\vec{s} = 0$$

daar uit (A2.4) volgt dat $\frac{\partial \Phi_j^*}{\partial s} = 0$ langs Γ_j ($j = 1, \dots, n$).

Voor de tweede term van (A2.6) schrijven we

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \oint_{\Gamma^{(j)}} \Phi_j^* \text{grad } \Phi_j^* \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \oint_{\Gamma^{(j)}} d(\Phi_j^*)^2 = 0,$$

daar Φ_j^* eenwaardig is in $G + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$).

We hebben dus bewezen dat $I = 0$ is en daar $\text{grad } \Phi_j^*$ en $\text{grad } \Psi_j^*$ continu zijn in $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$) volgt uit (A2.5)

$$\text{grad } \Phi_j^* = \text{grad } \Psi_j^* = 0 \text{ in } G_j + \Gamma^{(j)} \quad (j=1, \dots, n)$$

dus Φ_j^* en Ψ_j^* zijn constant in $G_j + \Gamma^{(j)}$ ($j=1, \dots, n$), want ze zijn continu.

Stellen we $\Phi_j^* = \lambda_j C_j$, $\Psi_j^* = C_j - \lambda_j^{-1} C_j'$ ($j=1, \dots, n$), waarin C_j en C_j' constanten zijn, dan volgt uit (A2.2) en (A2.3) dat voor alle j en k , waarvoor de kromme Γ_{jk} bestaat, geldt $C_j = C_k$, $C_j' = C_k'$.

Daar het gebied G samenhangend is, volgt hieruit dat $C_j = C$, $C_j' = C'$ voor alle j .

We vinden dus als resultaat dat voor het verschil van twee stellingen oplossingen voor de complexe potentiaal moet gelden

$$\Omega_j^* = c_j, \text{ met}$$

$$c_j = \lambda_j C + i (C - \lambda_j^{-1} C'),$$

waarin C en C' onbepaalde reële constanten zijn, hetgeen te bewijzen was.

15) Uit (2.6) en de eigenschappen van de stroomfunctie Θ volgt dat $\text{grad } \Phi_j^*$ continu is in $G_j + \Gamma^{(j)}$.

Appendix 3.

De functie $\varphi(x)$ is door (7.8) gedefinieerd als

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \operatorname{tgh} (2n+1) \pi \cdot \sin (n+\frac{1}{2}) \pi x \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Daar reeds $\operatorname{tgh} \pi = 0,9963$ is het zinvol om naast $\varphi(x)$ te beschouwen de functie

$$\varphi^*(x) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \sin (n+\frac{1}{2}) \pi x \quad (\text{A3.1})$$

Hiervoor geldt

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} \sin (n+\frac{1}{2}) \pi x = \frac{2}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (1-x), \quad (\text{A3.2})$$

hetgeen bewezen kan worden door Fourier-ontwikkeling van het rechterlid of door sommatie van de reeks met behulp van de machtreeks voor de functie $\ln \frac{1+ix}{1-ix}$.

Verder zien we onmiddellijk

$$\varphi^*(0) = 0, \quad \varphi^*(1) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{14}{\pi^3} \zeta(3),$$

waarin $\zeta(s)$ de zeta-functie van Riemann is ($\zeta(3) = 1,202\dots$) en

$$\varphi^{*'}(0) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{8}{\pi^2} L, \quad \varphi^{*'}(1) = 0,$$

waarin L het zgn. getal van Catalan is ($L = 0,916\dots$).

Op grond van (A3.2) kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) = \varphi^*(1) + \frac{1}{\pi} (1-x)^2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (1-x) - (1-x) \cdot \int_0^{1-x} \frac{u \, du}{\sin \frac{\pi}{2} u} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \frac{u^2 \, du}{\sin \frac{\pi}{2} u}. \end{aligned}$$

De juistheid van deze formule, blijkt onmiddellijk door differentiatie.

Ook kunnen we een formule aangeven die geschikt is voor kleine x

$$\varphi^*(x) = x \varphi^{*'}(0) + \frac{x^2}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (1-x) + x \int_0^x \frac{u \, du}{\cos \frac{\pi}{2} u} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{u^2 \, du}{\cos \frac{\pi}{2} u}.$$

Met behulp van deze formules is de functie $\varphi^*(x)$ (en daarmee $\varphi(x)$) eenvoudig numeriek te beheersen.

Literatuur.

- [1] G.W. Veltkamp, De invloed van stationaire windvelden op een zee van constante diepte. Rapport TW 23 van het Mathematisch Centrum, 1953.
- [2] W.F. Schalkwijk, A contribution to the study of storm surges on the dutch coast, 's-Gravenhage, 1947.
- [3] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations, Groningen, 1953.